trópos – ISBN 979-12-218-0119-4
DOI 10.53136/97912218011942 pp. 11-27 (maggio 2021)

NUMÉRISATION ET INCOMMENSURABILITÉ

GAETANO CHIURAZZI(*)

Abstract: Digital ontologies are presented as a revival of the Pythagorean vision according to which there is a perfect coincidence between being and number, understood as "whole number". The discovery of incommensurable magnitudes in Greek antiquity overturned this ontological postulate and brought about a wholly new vision of reality through the introduction of the concept of *dynamis* (the name used by Theaetetus to refer to these new magnitudes), up to the definition of being itself as *dynamis* that Plato gives in the *Sophist*. In this paper I will try to show the ontological meaning of the incommensurable magnitudes, which Leibniz also linked to factual truths, magnitudes which, as G. Chaitin clearly states, should not exist in a purely digital ontology.

Keywords: Digital Philosophy, Incommensurability, Chaitin, Leibniz, Ontology.

1. Le pythagorisme et la découverte de l'incommensurabilité

Sous le nom de "philosophies numériques", nous entendons les positions théoriques de certains philosophes, mathématiciens et informaticiens, tels que Konrad Zuse, John Conway, Edward Fredkin, John Weeler, Stephen Wolfram, Gregory Chaitin, qui défendent, de manière très explicite, une vision ontologique inspirée de l'ancien pythagorisme, c'est–à–dire de la thèse

(*) gaetano.chiurazzi@unito.it.

selon laquelle “tout est nombre” (*arithmos*), où le nombre doit être entendu, comme dans la plus ancienne doctrine de l’école pythagoricienne, comme entier naturel (*arithmos* peut être considéré en effet comme le correspondant grecque du mot anglais *digit*). Comme l’écrit Chaitin en particulier,

> La philosophie numérique est une sorte de vision néo–pythagoricienne. C’est une ontologie, c’est une métaphysique. Et c’est une sorte de pythagorisme. Pythagore disait « tout est nombre », Dieu est un mathématicien, l’univers est fait de un, deux, trois, quatre, cinq. Et la nouvelle version de cette idée pythagoricienne, cette nouvelle vision qu’est la philosophie numérique, dit que le monde est discret, qu’il est fait de zéros et uns, de *bits*, et que Dieu est un programmeur informatique. La nouvelle version est donc « tout est algorithme », au lieu de « tout est nombre ».(1)

A partir de ce postulat pythagoricien, les philosophies numériques développent une série de thèses que l’on peut résumer comme suit :

1. La réalité est faite d’éléments discrets, simples, qui composent toute chose. Cette idée a été remarquablement représentée par la doctrine Pythagoricienne des nombres figurés, laquelle postule la représentabilité de toute chose et de toute figure géométrique à travers des petits points, comme dans le cas de la figure la plus fameuse de l’école pythagoricienne, la *tétraktys*. La doctrine des nombres figurés constitue une véritable anticipation de la structure à pixels des écrans des ordinateurs, des téléphones portables ou des tablettes (ou des tableaux des pointillistes comme Seurat), sur lesquels on reproduit virtuellement le monde réel. C’est de ce même principe que s’inspire également le langage de la théorie de l’information, laquelle prétend décrire toute la réalité en utilisant seulement deux éléments (le 0 et le 1), correspondants aux états on/off des pixels. Cette numérisation nous offre la vision d’un monde tout à fait discontinu, atomisé, fait de rapports méréologiques et fractionnaires.
2. Tout ce qui existe n’est rien d’autre qu’une combinatoire d’éléments discrets, qui se combinent et se recombinent selon des formes diverses, mais qui en fait ne subissent aucune transformation. Ce qui apparaît comme une transformation n’est qu’une recombinaison de briques élémentaires (les *bits*), toujours identiques, un peu comme ce qui se passe dans les jeux de Lego.

(1) Chaitin G., *An Interview with Gregory Chaitin*, “Philosophy to Go”, 18 décembre 2010.

3. L'état de l'univers est le résultat d'une sorte de calcul algorithmique entre ces éléments : puisque leurs combinaisons sont réductibles à des opérations entre éléments discrets, les états de l'univers sont parfaitement calculables. « Tout calcule ! » comme le dit Zuse[2].
4. Les lois qui régissent l'univers sont donc absolument déterministes et il n'y a aucune place pour l'aléatoire, la contingence ou le hasard[3]. Comme l'affirme Stephen Wolfram dans *A New Kind of Science*, la complexité de l'univers n'est qu'apparente. Il n'y a ni hasard, ni contingence dans l'univers ; tout, aussi complexe que cela puisse paraître, est réductible, ou compressible, selon la terminologie de Chaitin, en algorithmes extrêmement simples.

Cette vision du monde est résumée de façon magistrale par E. Fredkin : la philosophie numérique « est une théorie atomique poussée à l'extrême dans laquelle toutes les quantités dans la nature sont finies et discrètes. Cela signifie que, théoriquement, chaque quantité peut être représentée par exactement un nombre entier »[4].

On sait que ce qui a bouleversé cette conception numérique de la réalité, et donc la capacité des nombres entiers à l'exprimer, est la découverte des grandeurs incommensurables, notamment la découverte de l'incommensurabilité de la diagonale du carré. Avec l'introduction de ces grandeurs dans les mathématiques, on voit se profiler une nouvelle conception de la réalité et du *logos*, qui implique le passage d'une ontologie statique à une ontologie dynamique[5], et d'une conception numérique (méréologique, ensembliste) à une conception analogique (comparative, proportionnelle) de la raison[6], qui en constitue aussi un élargissement[7], l'analogie étant un horizon plus compréhensif de la raison que celui de la numérisation. Le bouleversement qu'une

(2) Zuse K., *Rechnender Raum*, Vieweg & Sohn, Braunschweig 1969. Voir aussi Lloyd S., *Il programma dell'universo*, tr. it. par L. Civalleri, Einaudi, Torino 2006.

(3) Voir Floridi L., *Against Digital Ontology*, « Synthèse », n. 168, 2009, pp. 152–153.

(4) Voir http://www.digitalphilosophy.org.

(5) Vitrac B., "Les formules de la puissance (dynamis, dynasthai) dans les mathématiques grecques et dans les dialogues de Platon", in Crubellier M. *et al.* (éd.), *Dunamis. Autour de la puissance chez Aristote*, Editions Peeters, Louvain La Neuve–Paris–Dudley (MA) 2008, pp. 73–148.

(6) Voir von Fritz K., "Die Entdeckung der Inkommensurabilität durch Hippasos von Metapont", in Becker O. (éd.), *Zur Geschichte der griechischen Mathematik*, Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1965 ; Périllié J.–L., *La découverte des incommensurables et le vertige de l'infini*, « Cahiers philosophiques », CNDP, n. 91 (giugno 2002), pp. 9–29 ; Torh I., *Vérité et liberté. Pensée mathématique et spéculation philosophique*, Editions de l'Éclat, Paris–Tel Aviv 2009 ; Idem, *Platon et l'irrationnel mathématique*, Editions de l'Éclat, Paris–Tel Aviv 2011 ; Chiurazzi G., *Dynamis. Ontologia dell'incommensurabile,* Guerini & Associati, Milano 2017.

(7) Granger G.G., *L'irrationel*, Odile Jacob, Paris 1998.

telle découverte avait provoqué dans l'école pythagoricienne fut tel que sa divulgation fut interdite et, comme il est raconté dans le Commentaire de Pappus au Livre X des Éléments d'Euclide, celui qui contrevint à cette interdiction, Hippasus de Métaponte, fut expulsé de l'école et condamné au naufrage par Zeus[8].

Le scandale des grandeurs incommensurables est dû au fait que, pour les Grecs, elles ne sauraient être exprimées sous forme fractionnaire, comme rapport entre entiers et partie d'un ensemble, et donc ne sauraient être considérées comme des nombres. Elles seraient quelque chose de *toto genere* différent par rapport aux nombres entiers, un véritable *héteron.* Ne pouvant être numérisée, la diagonale du carré, par exemple, n'est pas représentable sur l'écran d'un ordinateur (elle y apparaît comme une ligne en zigzag). L'impossibilité de la numérisation est due au fait que le rapport entre la diagonale et le côté du carré n'aboutit jamais à une partie simple, mais produit une divisibilité à l'infini. Cette apparition de l'infini, avec le concept corrélé de continu, est la contestation théorique la plus radicale de la doctrine des nombres figurés et donc de la numérisation, c'est–à–dire de toute ontologie atomistique. L'irrationalité constitue donc, comme l'écrit Melandri, « le paradigme de la réfutation perpétuelle de tout atomisme : si nous concevons l'atome comme quelque chose d'absolu, un dilemme en résulte inévitablement. Soit nous renonçons à comprendre les mathématiques supérieures, soit nous relativisons le concept d'atome. Mais l'atome au sens relatif perd toute connotation d'identité élémentaire »[9].

La divisibilité à l'infini pose assurément des problèmes du point de vue mathématique et philosophique : du point de vue mathématique, elle signifie l'impossibilité de mesurer, ou plutôt la nécessité de pousser la mesure jusqu'à un niveau de précision absolue, ce qui est difficile à atteindre ; du point de vue philosophique, elle signifierait l'existence de l'infini réel, à savoir que tout est réellement fait de parties infinitésimales, avec tous les paradoxes que cela implique, y compris ceux de Zénon sur le mouvement : si la réalité est effectivement divisible à l'infini, Achille ne pourra jamais atteindre la tortue, et la flèche qui se déplace est en fait immobile. Ce sont précisément ces difficultés qui sont à la base — comme elles l'étaient déjà dans le monde antique — du rejet des quantités incommensurables, c'est–à–dire des nombres réels.

---

(8) Cf. *Pappus*, *The Commentary of Pappus on Book X of Euclid's Elements*, texte arabe et traduction de W. Thomson, Harvard Semitic Series, Cambridge 1930, pp. 63–77.

(9) Melandri E., *La linea e il circolo. Studio logico–filosofico sull'analogia*, Quodlibet, Macerata 2004, p. 260.

Gregory Chaitin, qui fait remonter la philosophie numérique à la physique numérique de Zénon[10], utilise divers arguments, tant mathématiques que physiques, pour rejeter les nombres réels, même si, observe–t–il, personne n'est prêt à les écouter[11]. On doit alors renouveler l'affirmation de Kronecker qui, à propos de la démonstration de l'irrationalité du π de Lindemann, disait : « À quoi sert–elle, ta démonstration, dès que π n'existe pas ? ». Adepte de Pythagore, Kronecker était tranchant : « Dieu a inventé les nombres entiers, tout le reste est une œuvre de l'homme »[12]. Ce qui sonne, au fond, comme une dévaluation de l'invention humaine.

Les nombres réels sont des objets analogiques qui nécessitent un nombre infini de bits pour être numérisés. Une première raison de les rejeter tient donc à la difficulté qu'ils posent aux fins du calcul : « les calculateurs », écrit Chaitin, « ne peuvent pas effectuer de calculs avec des nombres qui ont un nombre infini de bits ! Et ma théorie algorithmique de l'information est basée sur ce que les calculateurs peuvent faire »[13]. Les nombres réels sont donc une tromperie et, comme la continuité, ils n'existent tout simplement pas[14]. D'autre part, citant Richard Feynmann, qui a peut–être été persuadé de la physique numérique par Edward Fredkin, Chaitin écrit qu'il est totalement invraisemblable que, si les nombres réels existent, l'univers puisse jamais les calculer, même pour des événements complètement réduits dans l'espace et le temps. Bien sûr, cette objection suppose que l'univers ne fait que calculer, alors que les nombres réels expriment précisément la limite de la calculabilité, c'est–à–dire le fait que l'univers ne calcule pas toujours. La question de la signification ontologique des nombres réels, c'est–à–dire des quantités incommensurables, revêt ici une grande importance. Mais se demander quel est ce sens exige que l'on quitte une considération purement mathématique pour entrer dans un autre domaine, certes très insidieux, celui de la métaphysique.

2. La signification ontologique de l'incommensurabilité

Au cours de mes études sur le problème des quantités incommensurables dans le monde antique, une question a attiré mon attention, à savoir la manière dont Théétète, le théoricien desdites quantités, dont la théorie aurait été

(10) Chaitin G., *Meta Math! The Quest for Omega*, Random House, London 2005, pp. 78 et 124.
(11) *Ibidem*, p. 74.
(12) *Ibidem*, p. 87.
(13) *Ibidem*, p. 74.
(14) *Ibidem*, p. 78.

reprise par Euclide dans le livre X des Éléments, les nommait. Dans la célèbre leçon de mathématiques contenue dans le dialogue que Platon lui a consacré, Théétète déclare en effet appeler ces quantités *dynameis*, c'est–à–dire « puissances ou capacités». D'un point de vue mathématique, on dirait plutôt aujourd'hui "racines", mais le terme utilisé par Théétète, comme on l'a montré (par exemple dans un bel essai de Bernard Vitrac[15]), fait allusion au fait que ces quantités produisent une transformation lorsqu'elles sont élevées au carré. Le terme *dynamis* indique donc une capacité de transformation, qu'Aristote scelle dans la définition du livre IX de la *Métaphysique* : « la *dynamis* est *arché tes metabolés*, principe du changement, du *métaballein* »[16]. Il est vrai qu'au ch. 1 de ce même Livre, Aristote, qui avait peu de sympathie pour les mathématiques, contrairement à Platon, nous dit aussi que l'utilisation du terme *dynamis* en géométrie est entièrement équivoque, mais Aristote n'a pas la compréhension ontologique que Platon avait des mathématiques. Et pourtant, l'association entre quantités incommensurables et *dynamis* a plus d'une raison d'être, comme le montre l'ensemble de l'histoire qui suit, du Moyen Âge jusqu'à Leibniz. Cette association nous permet d'éclairer les deux concepts, car, d'une part, elle nous dit quelque chose sur ces grandeurs, c'est–à–dire qu'en tant que *dynameis*, elles doivent être considérées comme des principes de transformation, on peut dire des "limites" à travers lesquelles se réalise le "passage à l'autre", et, d'autre part, elle nous dit quelque chose sur la *dynamis*, c'est–à–dire qu'étant incommensurable, elle n'est pas *réductible* à l'actualité, l'actualité étant l'entité numérable, calculable, pleinement définie et discrète. La *dynamis* représente un excès par rapport à l'actualité, et surtout — comme les quantités incommensurables — elle indique un élément d'irréductibilité et d'incomplétude de la réalité, quelque chose qui en *diffère*. Je voudrais donc examiner ces significations ontologiques de l'incommensurable sous les titres d'*irréductibilité*, d'*incomplétude* et de *différence*.

3. Irréductibilité

La bataille de Chaitin contre les nombres réels est due au fait que ceux–ci — ou la plupart d'entre eux, en particulier les nombres réels aléatoires — ne sont pas compressibles, c'est–à–dire qu'ils ne peuvent pas être reconduits à

(15) Vitrac B., *Les formules de la puissance (dynamis, dynasthai) dans les mathématiques grecques et dans les dialogues de Platon*, cit., pp. 73–148.

(16) Aristote, *Métaphysique* IX, 1.

un algorithme qui les génère. Le concept de compressibilité est central dans la théorie de Chaitin, car il est lié au nombre Ω, qui exprime la probabilité d'arrêt d'un programme. On dit qu'un objet est compressible lorsqu'il existe un algorithme qui peut contenir toutes ses informations exprimées sous une forme plus simple. Il s'agit d'une opération de réduction grâce à laquelle, par exemple, toutes les informations relatives à une courbe sont contenues dans une formule donnée, conformément à ce que disait Leibniz, lorsqu'il affirmait que, étant donné une suite de points dans l'espace, il est toujours possible de trouver une courbe qui les traverse tous et ensuite une formule qui l'exprime[17]. Cela signifie que de toute succession apparemment aléatoire de points, il est en fait possible de trouver une loi plus simple qui la contient. Le concept de monade est chez Leibniz le correspondant métaphysique de la compressibilité algorithmique : la monade contient en elle–même toute l'histoire et le développement d'un individu, lesquels apparaissent donc comme prédéterminés dès le départ. Cette histoire n'est qu'une explication de ce qui est déjà implicitement écrit dans le simple concept de la monade.

Le concept de compressibilité suppose donc la réductibilité des faits à des lois plus simples. C'est sur cette base que repose également la distinction leibnizienne entre les vérités de raison et les vérités de fait. Alors que les premières sont des vérités analytiques, déductibles des vérités premières, c'est–à–dire qu'elles sont des vérités théorematiques, dans les vérités de fait le lien entre le prédicat et le sujet n'est pas analytique (le prédicat n'est pas inclus dans le sujet, selon cette relation d'*inesse* dont Leibniz fait le lien métaphysique qui relie les manifestations de la monade à son concept). Partant, Leibniz a associé les vérités de raison aux nombres commensurables et celles de fait aux incommensurables :

> La différence entre les *vérités nécessaires* et les *vérités contingentes* est en effet la même que celle qui existe entre les nombres commensurables et les nombres incommensurables ; car de même que dans les nombres commensurables la décomposition peut être faite en une unité de mesure commune, de même dans les vérités nécessaires la démonstration ou la réduction conduit à des vérités identiques. Tout comme dans les nombres irrationnels la décomposition se fait à l'infini, et l'on arrive à une unité de mesure commune, et l'on obtient

(17) Leibniz G.W., *Discours de Métaphysique suivi de Monadologie et autres textes*, tr. fr. de M. Fichant, Gallimard, Paris 2004. §6. Pourtant, comme le remarque V. Mathieu, même Dieu est une fonction: « Sur le plan logique, le Dieu de Leibniz n'est pas tant une personne, ou un centre d'activité, mais plutôt une fonction mathématique » (Mathieu V., *Introduzione* à Leibniz, *Teodicea*, éd. par V. Mathieu, Zanichelli, Bologna 1973, p. 11).

> une série, mais indéfinie ; ainsi, par le même processus, les vérités contingentes exigent–elles une analyse infinie, que Dieu seul peut entreprendre.[18]

Les vérités factuelles ne sont pas compressibles, sauf "à l'infini", c'est–à–dire en Dieu : elles sont comme les nombres réels, notamment les transcendantaux et les aléatoires, qui ne peuvent être reconduits à un algorithme, à une formule. Un événement contingent est donc incompressible, il est en quelque sorte "à lui–même sa propre loi". Chaitin nous dit que puisqu'elles ne sont pas compressibles, les vérités de fait ne sont même pas compréhensibles, supposant ainsi que seul ce qui est comprimé peut être compris. Il y aurait des raisons de douter de cette corrélation. Personnellement, je serais plutôt enclin à soutenir que ce qui n'est pas compressible ne peut être que compris : de ce qui est compressible on peut aussi donner une représentation plus intuitive, parce que plus simple, mais pas de ce qui n'est pas compressible. Sa complexité empêche une telle forme d'intuition et ce que l'on peut dire, c'est précisément qu'elle ne peut être réduite à quelque chose de plus simple. On comprend exactement sa différence avec tout ce qui est plus simple, et la différence est toujours l'objet de la compréhension, non de l'intuition. La compréhension est un concept analogique, différentiel, et non numérique, comme l'intuition. Formellement, on devrait donc dire, contre Chaitin, que seul ce qui peut être comprimé peut aussi être intuitionné, tandis que ce qui ne peut pas être comprimé ne peut être que compris, compris comme *différent* de tout ce qui est plus simple. Cette idée trouve un appui, à mon avis, dans le court passage du *Théétète* dans lequel Platon discute des différentes significations du terme *logos*, dont la troisième est définie comme "comprendre une différence" : le terme utilisé ici par Platon, très rare d'ailleurs dans ses dialogues, est *hermeneuein*. Platon veut dire que pour comprendre quelque chose il est toujours nécessaire de le référer à quelque chose d'autre, de saisir une différence donc : on ne peut pas comprendre ce qu'est le soleil si l'on dit simplement que c'est un astre, mais il faut dire que c'est l'astre le plus brillant, exprimer donc une différence comparative, analogique. L'incommensurabilité n'est donc pas quelque chose d'incompréhensible : la comprendre, c'est comprendre qu'elle est quelque chose de différent, *héteron*, de tout nombre rationnel. C'est également ce qui se passe dans la traduction : le fait que l'on ne puisse pas toujours exprimer parfaitement un sens dans une autre langue, que l'on ne puisse pas le réduire à ces significations, signifie que l'on comprend l'écart, la différence

(18) Leibniz G.W., *Sulla scienza universale o il calcolo filosofico. Sulla caratteristica*, dans *Scritti di logica*, éd. par F. Barone, Laterza, Bari 1992, p. 171.

qui le sépare de toute signification dans la langue cible. Saisir cette différence ne signifie pas ne pas comprendre. Ce n'est pas un hasard si l'herméneutique s'est développée précisément comme une discipline visant à comprendre les faits historiques, c'est–à–dire ces vérités qui ne sont pas réductibles à des vérités logiques, analytiques, et qui nécessitent une forme de rationalité, non pas numérique, mais analogique, ce qu'Aristote appelle *phronesis*.

4. Incomplétude

Penser qu'il pourrait y avoir une sorte d'"algorithme définitif", c'est–à–dire un algorithme qui pourrait vraiment contenir en lui–même la totalité de la réalité, comme une super monade, signifie penser que la totalité de la réalité, nous y compris, est compressible. Si un tel algorithme était possible, comme le prétend Pedro Domingos, il serait capable de traiter l'énorme quantité de données produites dans notre vie et de s'autoprogrammer, à partir de celles–ci, afin de former un véritable "double" virtuel, un *avatar*, une sorte de "miroir numérique" du monde et de nous–mêmes. De cette manière, un "nous" virtuel se reproduirait, complètement indiscernable de nous–mêmes. Il pourrait être placé dans une clé USB dans notre poche et pourrait prendre notre place dans de nombreuses tâches quotidiennes : il pourrait faire les choix que nous ferions, décider quel livre acheter, quel film voir, quelle musique écouter, mais aussi quelle personne voir ou quel travail choisir. Il serait notre *alter ego*, à qui nous pourrions déléguer notre vie et qui nous dispenserait même de prendre des décisions et d'accomplir des actions. Au lieu de vivre, nous pourrions "nous laissez vivre". Tout pourrait être fait par nos *alter ego* virtuels. Domingos décrit un tel scénario d'une manière qui s'avère moins farfelue qu'il n'y paraît. Notre modèle virtuel filtrerait notre courrier électronique, répondrait à notre place, vérifierait nos relevés de carte de crédit et s'occuperait à notre place de toutes les tâches ennuyeuses de notre vie. Mais il pourrait aussi choisir un remède à nos maux, les lieux de travail et de vacances, voter aux élections et sélectionner les personnes avec qui sortir le soir, et choisir un restaurant où dîner(19). Et ensuite ?… À ce stade, la question vient spontanément : et ensuite ? car on ne sait pas ce qu'il nous resterait à faire, à nous, en chair et en os : et s'il restait quelque chose à faire, cela signifie que notre

(19) Domingos P., *L'algoritmo definitivo*, tr. it. par A. Migliori, Bollati Boringhieri, Turin 2015, p. 308. Sur ce thème, cf. aussi Accoto C., *Il mondo dato. Cinque brevi lezioni di filosofia digitale*, Egea, Milano 2019.

avatar n'exprimerait pas toute notre vie et serait donc incomplet. Il y aurait plus dans notre vie réelle que dans sa reproduction algorithmique. Et les deux seraient pourtant incommensurables, irréductible l'une à l'autre.

Une duplication absolue de notre vie, comprimée dans un algorithme définitif, ne nous permettrait plus de distinguer le virtuel du réel, et entraînerait le paradoxe de la duplication parfaite que Borges présente dans *Du rigueur de la science.* Borges y raconte d'une société dans laquelle la rigueur de la science avait atteint un tel point de perfection qu'elle avait reproduit parfaitement son territoire en construisant une carte totalement identique et superposable, et donc interchangeable, avec la réalité. Mais précisément à cause de cela, elle devint complètement inutile. Une carte a un sens — littéralement : elle produit une orientation dans la réalité — si elle ne contient pas la totalité de la réalité, mais en est une reproduction "à l'échelle" (proportionnelle) ou sélective. D'autre part, aucune carte ne pourra jamais reproduire exactement la réalité, car sinon elle devrait se reproduire en elle, ce qui donnerait lieu à une régression à l'infini (un paradoxe formulé pour la première fois par Josiah Royce en 1898)[20]. Ainsi, l'algorithme final, tout comme la carte absolue, devrait également s'inclure lui–même, puisqu'il fait lui–aussi partie de la réalité qu'il doit reproduire intégralement, ce qui engendrerait une contradiction similaire à celle des théorèmes de Gödel ou de Turing. Un algorithme définitif de ce type ne peut donc pas exister. Pour qu'une carte — comme toute représentation — fonctionne, *il faut que* quelque chose *n'y existe pas* et lui échappe. Un écart entre la réalité et sa simulation algorithmique rend cette simulation nécessairement incomplète : sa complétude engendrerait une contradiction, celle de la carte qui doit se contenir elle–même.

5. Différence

Que les vérités contingentes soient irréductibles aux vérités de raison, que l'aléatoire ne soit pas compressible, signifie qu'il y a en eux une différence qui ne peut être réduite à l'identité. L'introduction d'une différence réelle est donc une autre conséquence philosophique des quantités incommensurables, le vrai *héteron*, selon la thèse d'Imre Toth, que Platon introduit dans le *Sophiste*[21]. Dans

(20) Voir Royce J., *Il mondo e l'individuo*, tr. it. par G. Rensi, Laterza, Bari 1914, vol. II, p. 244–256. Royce discute de ce paradoxe en relation avec la définition de Dedekind de l'infini comme un tout qui peut être relié à sa propre partie.

(21) Toth I., *Platon et l'irrationnel mathématique*, Editions de l'Éclat, Paris–Tel Aviv 2011.

ce dialogue — qui suit chronologiquement et conceptuellement le *Théétète* — Platon discute les ontologies monistes et pluralistes qui l'ont précédé, en montrant leur paradoxe fondamental : leur dissolution dans l'indifférencié.

Les difficultés dans lesquelles tombent ces ontologies concernent une certaine confusion, due à une façon de parler quelque peu enfantine (242c). Tous ceux qui ont essayé de penser l'être, dit Platon, ont tenté de résoudre la question de manière mythique, en nous racontant des histoires, « comme si nous étions des enfants » : ils ont réduit le problème du *tò ón* à un problème de numérabilité élémentaire, c'est–à–dire en se référant à une, deux, trois ou plusieurs entités. Cette façon enfantine de penser est commune aux ontologies monistes et pluralistes. Dans les deux cas, il s'agit de compter comme on le fait avec ses doigts : un, deux, trois, etc. L'Étranger observe cependant que si nous identifions l'être à un seul des deux principes, l'autre sera un non–être, de sorte qu'il n'y a en fait qu'un seul principe ; si, au contraire, nous plaçons deux ou plusieurs principes, tous compris comme *étant*, le résultat est paradoxalement le même : puisqu'ils sont tous "être", ils se réduisent à un seul. Il s'ensuit que « les deux sont un » (244a).

Il semble que, si nous partons d'une considération numérique du problème de l'être, il n'y a pas d'alternative au monisme parménidien et à ses paradoxes. Que le principe soit unique ou que nous posions une multiplicité de principes, le résultat est toujours le même : « deux est un » ou « un est deux », ou « un est aussi plusieurs » (244a ; 245b). L'intérêt de cette conclusion est qu'elle est tout à fait analogue à celle par laquelle on prouve l'incommensurabilité de la diagonale du carré. Car la négation de cette incommensurabilité implique qu'un est deux, ou, plus généralement, que les nombres pairs sont égaux aux nombres impairs. Ainsi Aristote dit dans les *Premiers Analytiques* : si la diagonale du carré était commensurable avec le côté, alors les nombres impairs seraient égaux aux nombres pairs (*An. Pr.* I, 23, 41a 23–31), et un serait égal à deux. Une absurdité qui, comme le dit Socrate dans le *Théétète*, ne peut même pas être crue en rêve (190b).

En montrant que la commensurabilité de la diagonale entraînerait une chute dans l'indifférencié, dans une sorte de "nuit où toutes les vaches sont noires", ce théorème conduit à la conclusion que, puisqu'impair n'est pas égal à pair (ou même, un n'est pas égal à deux), alors il y a de l'incommensurable. Loin de miner la rationalité du *lógos*, l'incommensurable se révèle être la condition nécessaire pour qu'il ne produise pas de contradiction, en évitant que, par suite de la commensurabilité absolue du réel, l'un finisse par être égal au deux, et que tout se réduise à l'indiscernabilité de l'un. J'appelle ce théorème le "théorème de la différenciation interne de l'ontologie". Il signifie que l'incommensurable *assure la différenciation et la discernabilité du réel*, il n'est pas le principe de son indistinction. Il s'agit d'un résultat comparable, comme le fait remarquer à juste titre Georg Kreisel[22], à celui des théorèmes d'incomplétude de Gödel, ainsi qu'aux coordonnées fondamentales de la critique kantienne[23]. Mais on peut aussi y reconnaître la thèse heideggérienne selon laquelle la différence ontologique (celle par laquelle l'être n'est jamais réductible à l'étant) est la condition de *possibilité* de toute différence ontique, voire de l'apparition même de l'étant et de sa possibilité de signification. L'incommensurable est nécessaire pour "sauver les différences", au point que le *tò héteron* s'élève, comme il arrive dans le *Sophiste*, au rang de genre somme de l'être. Mais pour que cela soit possible, il ne peut être ni pair ni impair, mais ontologiquement *hétérogène* au système des entiers positifs. La découverte des grandeurs incommensurables est paradigmatique de toute sortie d'un domaine préétabli (dans ce cas, le domaine des nombres naturels), de toute sortie d'un système contraignant et fermé (ce qui, traduit en termes politiques, serait la sortie de la domination[24]).

6. Irréversibilité et créativité

Comment sortir d'un domaine donné ? C'est la question, en même temps logique et éthique, que nous posons à la philosophie numérique. C'est une question sur l'existence de la liberté, sur la contingence, sur la créativité, sur la possibilité que quelque chose de vraiment nouveau et de différent se produise. Un monde absolument numérique est un monde dans lequel rien de nouveau n'est possible et dans lequel tout se répéterait toujours exactement de la même manière. Il ne faut pas confondre cela avec le fait que certains automates cellulaires semblent donner lieu à des configurations toujours différentes et nouvelles, non répétitives : le problème est plus radical, à savoir que, s'il était redémarré, cet

(22) « Les théorèmes d'incomplétude concernent des cas uniques, comparables à l'irrationalité de la racine carrée de 2, comme $n^2 \neq 2m^2$, un cas exemplifié de problème diophantien » (Kreisel G., *Gödel's Excursions into Intuitionistic Logic*, dans *Gödel Remembered*, édité par P. Weingartner et L. Schmetterer, Bibliopolis, Naples 1987, p. 126).

(23) Sur ce point, je me réfère à Chiurazzi G., *Contradizione e incompletezza. La critica kantina di fronte al problema della totalità*, in Pirri M., Zenobi L. (eds.), *Costruzione di un concetto. Paradigmi della totalità nella cultura tedesca*, Mimesis, Milan–Udine 2014, pp. 31–44.

(24) Chiurazzi G., *L'uscita dalla caverna: digitalizzazione del reale e libertà*, «Itinera. Rivista di filosofia e di teoria delle arti», N.S., n. 10, 2015, pp. 13–25. Sur le lien entre les mathématiques et la domination de la numérisation cf. aussi Zellini P., *La dittatura del calcolo*, Adelphi, Milano 2018.

automate cellulaire donnerait toujours lieu aux mêmes configurations et que, à partir de n'importe lequel de ses états, il serait toujours possible de reconstruire une chaîne d'états précédents et futurs. Tout comme dans la rose, mentionnée par Chaitin, dont Paracelse affirmait pouvoir la faire renaître de ses cendres, rien ne serait perdu et tout pourrait revenir. Mais si la rose — cette rose, et non son concept —, en tant qu'existant, est un événement contingent, son contenu d'information algorithmique ne pourra jamais être réduit à quelque chose de plus simple que la simple présence et répétition de la rose elle–même : les faits contingents sont pour eux– mêmes, ils ne peuvent être réduits à autre chose, tout comme les vérités de fait ne peuvent être réduites aux vérités de raison, et un territoire à une carte. Un objet numérique (par exemple, l'image en pixels d'une rose) peut toujours être comprimé (comme on dit habituellement, zippé) et décompressé, sans aucune perte d'information : c'est une caractéristique des entités numériques, cette sorte d'"immortalité" qui coïncide avec une symétrie interne totale, qui fait en sorte qu'elles soient toujours réversibles[25]. À chaque instant, il existe suffisamment d'informations pour reconstituer chaque passage antérieur et futur. Une image numérique de la rose est donc plus immortelle que la rose réelle.

La question de la créativité revient donc à savoir, dit Chaitin, si l'univers est analogique (c'est–à–dire marqué par l'incommensurabilité et la contingence) ou numérique. Sa réponse — ou son souhait — est que l'univers est numérique et que, comme un grand automate cellulaire, il est fondamentalement réversible. Un univers dans lequel il existe ne serait–ce qu'une fraction d'incommensurabilité, comme l'observait déjà Nicolas d'Oresme au XIVe siècle, ne pourrait en aucun cas être réversible. Un tel univers impliquerait un surplus inévitable d'informations tel qu'aucun algorithme ne pourrait les exprimer d'une manière plus simple que leurs occurrences. Dans un univers numérique, les événements seraient plutôt représentables comme des vérités "théorématiques", déductibles algorithmiquement de leurs états fondamentaux, lesquels contiendraient toutes les informations nécessaires pour les reconstruire dans leurs développements antérieurs et ultérieurs. Dans le *Fragment sur l'Apokatastasis*, Leibniz affirme qu'« il est nécessaire qu'un jour les histoires publiques antérieures reviennent exactement »[26], une thèse fondée sur sa doctrine du calcul combinatoire appliqué à la structure de la réalité. Mais si l'infini des vérités de fait ne peut ni être exprimé par le calcul combinatoire, ni être ramené à un rapport ultime, et donc à une

(25) Chaitin, *Meta Math!*, cit., p. 76.

(26) Leibniz G.W., *Storia universale ed escatologia. Il frammento sull'Apokatástasis*, tr. it. par R. Celada Ballanti, il Melangolo, Genova 2001, p. 13.

relation d'identité, alors la réalité n'est ni symétrique ni réversible. Il n'y a donc pas d'"éternel retour de l'identique" (*ewige Wiederkehr des Gleichen*), pour citer Nietzsche. Celui qui se tient et vit dans l'histoire, sait plutôt, comme l'écrit Gadamer, que rien ne revient[27].

Nietzsche lie sa doctrine de l'éternel retour de l'identique à des considérations cosmologiques et au principe de la conservation de l'énergie : « Le principe de la conservation de l'énergie exige *l'éternel retour* »[28]. On ne l'a peut–être pas assez remarqué, mais en affirmant cela, Nietzsche nie totalement que le monde soit le résultat d'une force éternelle créatrice et innovatrice ; une idée, celle–ci, qui voudrait encore sauver la divinité du monde. Pour ceux qui croient encore à cette divinité, « le monde, même s'il n'est plus Dieu, doit encore être capable de la force créatrice divine, de la force transformatrice divine »[29]. Au contraire, il faut se débarrasser d'une telle idée de divinité du monde et le considérer comme une simple répétition, à l'infini, de l'égal. Nietzsche est ici extrêmement cohérent : l'éternel retour exclut la créativité, c'est–à–dire la divinité du monde, et ce malgré l'interprétation, à mon avis complètement erronée, qu'en a donnée Deleuze[30].

La question de la créativité apparaît ainsi comme l'un des problèmes les plus épineux des philosophies numériques, dont l'importance commence à se faire sentir même face aux récentes tentatives de production d'œuvres d'art par l'IA. Aujourd'hui, on est submergé par de la musique, des images, des films, etc. produits numériquement. Mais il s'agit néanmoins d'art fait *avec* un instrument numérique. Ce qui est nouveau est qu'on puisse avoir de l'art fait *par* un programme numérique, par un ordinateur. En effet, on a assisté récemment à la production d'une peinture faite par un ordinateur dans le style de Rembrandt, *The Next Rembrandt* ; et une peinture, *Portrait de Edmond de Belamy*, a été également faite par un ordinateur dans le style des impressionnistes (elle a d'ailleurs été mise aux enchères chez Christie's pour 10.000 euros). Enfin, un ordinateur, dûment programmé, a été capable d'écrire un sonnet à la manière de Shakespeare. Et encore plus récemment, un programme de Huawei a complété la célèbre symphonie N.8 *Inachevée* de Schubert. Devons–nous dire que ces productions sont des œuvres d'art ? Qu'il y a de la créativité en elles ?

L'on peut nier que l'art coïncide avec la créativité, et soutenir qu'il peut très bien y avoir de l'art sans créativité. Stephen Wolfram, par exemple, nie

(27) Gadamer H.–G., *Verità e metodo*, tr. it. di G. Vattimo, Bompiani, Milano 1986³, p. 413.

(28) Nietzsche F., *La volontà di potenza*, tr. it. par A. Treves, révisé par P. Kobau, Bompiani, Milano 1995, af. 1063.

(29) Nietzsche F., *La volontà di potenza,* cité, af. 1062.

(30) Deleuze G., *Nietzsche et la philosophie*, P.U.F., Paris 1962, pp. 52 ss.

complètement que l'on puisse parler de créativité, non seulement, évidemment, dans le cas de ces œuvres, mais en général, et précisément parce que dans l'univers rien n'est aléatoire et contingent, et la créativité ne semble pas possible sans l'aléatoire et la contingence. Ce qui semble aléatoire n'est pour Wolfram que du pseudo–aléatoire, toute complexité étant fondamentalement réductible à des algorithmes très simples. Par conséquent, rien n'est contingent et tout arrive pour une raison déterminée.

Chaitin semble partager l'idée d'un univers numérique, qui implique l'inexistence des nombres réels, comme nous l'avons vu, et pourtant sa découverte du nombre Ω, qui introduit l'aléa absolu dans le monde des nombres, semble contredire sa position ontologique, ou du moins introduire une divergence entre l'ontologie (numérique) et les mathématiques, c'est–à–dire la description algorithmique du monde, qui ne peut jamais reproduire parfaitement une telle réalité. De cette manière, il tente en quelque sorte de sauver une forme de créativité, au moins au niveau épistémique. Tout Système Axiomatique Formalisé (SAF) n'est qu'un îlot dans la connaissance mathématique (qui est d'une extrême complexité), et en tant que tel est inévitablement incomplet. C'est cette incomplétude qui introduit dans les mathématiques un élément dynamique : la limite de tout Système Axiomatique est en même temps le principe de sa dynamique, c'est–à–dire de sa transformabilité. « Le problème de la métamathématique actuelle », écrit Chaitin, « est qu'elle ne traite que des SAF statiques — pour les réfuter. Alors, d'où viennent les nouvelles idées mathématiques ? Pourrait–il y avoir une théorie à leur sujet ? Une vision dynamique et non statique des mathématiques, une métamathématique dynamique, une sorte de SAF dynamique, peut–être […] »[31]. Puisqu'un SAF figée et statique ne peut fonctionner, il est nécessaire de penser les mathématiques comme étant en constante évolution, d'y introduire du mouvement, disons, et donc de la *dynamis*.

Mais n'est–ce pas là la conséquence à laquelle Platon aussi était déjà parvenu, en s'ouvrant vers des conséquences ontologiques plus radicales, suite à sa confrontation avec les philosophies monistes et pluralistes (c'est–à–dire proprement numériques) des présocratiques ? (Il convient de noter que Chaitin revendique avec une grande conscience l'ascendance présocratique de la philosophie numérique[32]). Pour sortir de l'impasse à laquelle elles conduisent (l'effondrement dans l'un et dans l'indifférencié), Platon propose de définir

(31) Chaitin G., *Meta Math!*, cit., p. 128.

(32) Idem, *What is Life? An interview with Gregory Chaitin*, "PhilosophyToGo", 18 décembre 2010 (online).

l'être lui–même comme *dynamis*, comme quelque chose d'intermédiaire entre un et deux, tout comme $\sqrt{2}$ est un moyen terme proportionnel entre un et deux. C'est ici que la corrélation entre incommensurabilité et *dynamis*, proposée dans le *Théétète,* prend toute sa signification ontologique. Sur base de cette définition, en effet, Platon nous dit qu'il n'est dès lors plus possible de penser l'être — en particulier le monde des formes suprasensibles — comme statique, c'est–à–dire comme dépourvu de vie, mais qu'il faut plutôt y introduire le mouvement et la différence.

> Allons–nous vraiment nous laisser convaincre si facilement que le mouvement, la vie, l'âme et la pensée intelligente ne sont pas présents dans ce qui est pleinement (*pantelôs*), qu'il ne vit ni ne pense et qu'au contraire, solennel et sacré, dépourvu d'intellect, il se tient dans une immobilité immobile ? (*Soph.* 248e–249a).

Tout comme les mathématiques pour Chaitin, le monde des formes supposées statiques dans l'hyperuranium platonicien est de cette façon dynamisé. À mon avis, Platon arrive à cette conclusion précisément à cause d'une confrontation théorique avec le problème des grandeurs incommensurables, tout comme pour Chaitin cette dynamisation des mathématiques est une conséquence de leur incomplétude, à savoir de l'existence d'une limite, exprimée par Ω, qui est un nombre réel, bien que très particulier, qui y introduit l'aléa et la contingence.

7. Le paradoxe de la philosophie numérique

Au terme de ces considérations, on ne peut s'empêcher de remarquer une certaine ambiguïté dans la position de Chaitin, qui révèle probablement une ambiguïté, et peut–être même un paradoxe plus profond, qui se trouve au cœur des philosophies numériques. En fait, Chaitin semble nier l'existence des nombres réels, avec le niveau plus ou moins grand d'aléatoire qu'ils impliquent, en tant qu'objets analogues algorithmiquement intraitables et non réductibles, et, à la fois, affirmer l'incomplétude des systèmes axiomatiques, révélée par les théorèmes de Gödel, de Turing et par le sien sur le nombre Ω. Dans tout cela, on ressent quelque chose de paradoxal. La numérisation — c'est–à–dire la discrétisation de la réalité — est en effet assumée en même temps comme présupposition du fait que tout est réduisible à un algorithme, et donc calculable, et du fait que les événements du monde, précisément parce qu'ils sont discrets, peuvent être complètement aléatoires, comme les suites de pile ou face, complètement discontinus et déconnectés, qui ne sont ni réductibles à un algorithme ni calculables. Cette ambiguïté se retrouve sous une autre forme dans ce que Leibniz appelait « Labyrinthe », le labyrinthe du continu et du discret, auquel il associait un autre labyrinthe, celui de la nécessité et de la liberté. Dans ces labyrinthes, il semble que, en entrant par l'un des deux termes, on finisse par sortir exactement par l'autre. Il ne s'agit donc pas d'une aporie, c'est–à–dire d'une impasse, d'une voie sans issue, mais d'une voie qui débouche sur son contraire. Ainsi, en entrant dans le discret, découvre–t–on l'incomplétude, c'est–à–dire un nombre réel qui ne peut être exprimé dans le discret. De la discontinuité d'une équation diophantienne on produit un nombre réel, Ω, qui en tant que réel est analogique. La dernière question que nous pouvons donc nous poser, et que je pose en conclusion comme ce qui pour moi exprime l'énigme du numérique, et qui révèle une difficulté déjà présente dans les antinomies de Kant, est donc : un monde discret est–il un monde déterministe, simplement parce qu'il est entièrement réductible et commensurable, ou est–il au contraire un monde aléatoire, étant justement absolument discret ? Comment est–il possible qu'une prémisse identique — le caractère discret de la réalité — semble permettre les deux conséquences : que tout soit calculable, et que rien ne soit calculable ?