Fernando Zalamea

HACIA UNA RESISTENCIA SINTÉTICA EN FILOSOFÍA MATEMÁTICA. PENSAMIENTO LÓGICO Y PENSAMIENTO TOPOLÓGICO EN RIEMANN, PEIRCE Y GROTHENDIECK

Abstract
We study the concept of border/frontier *under non-analytical perspectives (reverse, continuity, mediation), and we situate Riemann's surfaces (1850), Peirce's continuum (1890) and Grothendieck's categorical archetypes (1960) under those three perspectives. We further present* sheaf logic *as a mediation between* logical *(analytical) and* topological *(synthetical) polarities, which helps to better understand some border/frontier problems, and to expand reason beyond purely linguistic constraints.*

La *inteligencia* consiste en un complejo tránsito entre *in*-formación y *trans*-formación de signos. En la *frontera* entre interior (*in*) y exterior (*trans*), situándose entre una acumulación de datos y una invención a partir de ese bagaje previo, actúa la inteligencia. Por un lado, se apoya en la sabiduría, pero por otro lado la quiebra, y se potencia mediante la *imaginación*. Una inteligencia periférica se encuentra atenta tanto a los centros del saber (tradición, normalización, erudición), como a los bordes (liberación, ramificación, suavización), y trata de develar las fuerzas originales de los *márgenes* donde se *desborda* la imaginación. Allende una *normalización analítica* de la filosofía, realizada a lo largo del siglo XX, especialmente atenta a consideraciones lingüísticas, es interesante explorar entonces una *resistencia sintética* a una tal normalización, donde algunos *bordes* del pensamiento y algunas *prácticas reales* de la ciencia y del arte otorgan nuevas perspectivas para el entendimiento.

Margen – del latín *margo*: borde, orilla – evoca, en español, un sustantivo ambivalente, cuyo acorde masculino o femenino queda a libre arbitrio del intérprete. Extremidad, límite o espacio en blanco, el margen representa, física y simbólicamente, aquello que queda de lado, alejado de un conjetural centro. Sin género y sin lugar, el margen es no obstante, precisamente gracias a su indefinición y genericidad, un concepto de una extraordinaria riqueza y ductilidad para poder ver más ampliamente el mundo, y para poder modificarlo gracias a un entramado de medias tintas disponible desde el *revés* mismo de los acontecimientos. De hecho, al situarse en un borde, en una orilla, en una frontera, la visión se *multiplica*: percibe varios territorios a la vez, varias interpretaciones, varios *rectos* y *versos* de una misma situación. Lo aparentemente unidimensional se torna adecuadamente multifacético, y la percepción de la cultura desde sus márgenes adquiere gran densidad y hondura. En efecto – como lo señalaba Bajtin, al explicar que todo problema importante de un dominio de la cultura era el problema de las fronteras de ese dominio – a menudo, desde una perspectiva central, la visión del mundo se trivializa y, rápidamente, se agota.

Desde Ramón Llull hasta Jean Petitot, pasando por Bruno, Leibniz o Peirce, una *razón amplia* ha luchado siempre contra todo tipo de reduccionismos. En todos estos pensadores, una importante *precedencia* de la geometría sobre la lógica, y, por tanto, de la visión sobre el lenguaje, ha ido en contra de las tradiciones algo anquilosadas de la academia. *Una cierta topología inicial subyace en realidad a lógicas posteriores*. En lo que sigue de este artículo presentaremos: (0) una problemática general del *borde*, ligada a esa *inversión* de lo lógico y lo *topo*-lógico; (1)-(3) algunos aportes de Riemann, Peirce y Grothendieck en el pensamiento geométrico de la lógica; (4) una exposición conceptual de la *lógica de haces*, como *resistencia* y enlace entre topología y lógica; (5) una insinuación de una *apertura topológica de la razón*, bajo los lineamientos anteriores.

0. *La problemática del borde: revés, continuidad, mediación*

El *péndulo del pensamiento* se agita en un vaivén entre variación e invarianza, cambio e identidad, diferencia e integración, discreción y continuidad, análisis y síntesis, interior y exterior. El *back-and-forth* entre los extremos produce, en un *terreno medio*, algunas de las más originales formas del entendimiento. En la *frontera topológica*, en el *borde*, emerge la creatividad. Desde esa frontera, podemos observar a la vez (1) un *revés* (de lo positivo), (2) una *continuidad* (entre lo negativo y lo positivo), y (3) una *mediación* (en una aproximación al límite fronterizo). Dado que la riqueza del pensamiento es irreducible a cualquier perspectiva fija, o a cualquier método determinado por adelantado, resulta esencial abrirse a una *multiplicidad* de situaciones, donde la tríada inicial (1)-(2)-(3) (revés-continuidad-mediación) *se itera y se ramifica* por doquier (como, por otra parte, lo promulga la semiosis ilimitada peirceana).

El *análisis matemático y filosófico* ayuda a desbrozar y descomponer una problemática dada. En particular, el retroceder del razonamiento, el regresar a algunas bases desde las cuales poder recomponer una arquitectónica, el retirarse de entornos vagos y anegados, son acciones que permiten fijar ciertas “ideas claras”. Pero en los retrocesos, regresos y retiros, el investigador accede también a un muy interesante *revés* de las situaciones. En ese análisis abierto a lo nocturnal y a una cierta *armonía negativa*, situaremos a (1) Riemann. Por otro lado, una *síntesis matemática y filosófica* produce perspectivas integradoras sobre la problemática inicial. Una visión holística, un tejido donde múltiples fibras se entrelazan, una red con una amplia variedad de niveles, permiten calibrar la complejidad del saber, con todo tipo de traslapes entre lo real y lo ideal, lo natural y lo artificial, lo denso y lo libre. Allí, la postulación de una *continuidad semiótica* entre el mundo de la cultura y el mundo de la naturaleza puede asumirse como una útil hipótesis: es el *sinequismo* de (2) Peirce. Finalmente, en el vaivén entre la penumbra y la luz, en la lucha entre lo negativo y lo positivo, lo topológico y lo lógico, las posiciones intermedias (amanecer, atardecer) se convierten en verdaderos detonantes de la imaginación. En el ámbito de una *mediación activa* entre tipos y arquetipos, evocaremos a (3) Grothendieck.

1. *Riemann: la armonía negativa de la multiplicidad y la unidad*

En el *revés* (1), en el ámbito de la *armonía negativa*, se sitúa buena parte de la obra de Bernhard Riemann (1826-1866). Para Riemann, a partir de los sistemas conceptuales de la *antítesis*, determinados por predicados *negativos*, se pueden obtener representaciones de interés, por *pura variación de las relaciones de magnitud*. Entre negatividad (obstrucción) y armonía (tránsito), la obra de Riemann se despliega a lo largo de un vaivén pendular entre problemas ("muros" en la etimología griega) y resoluciones: *(i)* el problema de la multivalencia de las funciones de variable compleja y las *superficies de Riemann*, *(ii)* el problema de las singularidades de las funciones meromorfas y la *continuación analítica*, *(iii)* el problema de las deformaciones de las funciones holomorfas y la *representación conforme*, *(iv)* el problema de los cortes de una superficie (género geométrico) y la invarianza algebraico-diferencial establecida por el *teorema de Riemann-Roch*, etc.

La Tesis Doctoral de Riemann, posiblemente la mayor tesis doctoral jamás escrita en matemáticas, introduce, entre muchos otros aportes, lo que hoy llamamos "superficies de Riemann"[1]. Comprendida por vez primera por la joven escuela italiana (traducción de Betti al italiano en 1860), la Tesis de Riemann introduce las herramientas centrales que, aún hoy en día, permiten estudiar con cuidado las *fronteras* entre diversas regiones de la matemática: variable compleja, geometría, teoría de números, álgebra abstracta, topología, análisis funcional. La *multivalencia* de una función de variable compleja, vista desde el plano complejo en sí mismo (por ejemplo, una función potencia o la función exponencial), *obstrucción* que impide su *inversión* natural, se torna en *univalencia* si se mira la función desde el plano sobre su superficie de Riemann asociada, lo que permite entonces el *tránsito* de la inversión. De esta manera, en el ámbito de la geometría compleja, *la multiplicidad se torna en unidad*. En las *ramificaciones* de las hojas de la superficie, se obtienen *circulaciones continuas* de información, que no sólo precisan ciertos ámbitos calculatorios para resolver problemas matemáticos, sino que proponen también, en un nivel metafórico más alto, un ámbito conceptual extendido para entender mejor ciertas circulaciones culturales, no elementales ni lineales.

2. *Peirce: la fenomenología del continuo*

Desde 1859 en adelante ("Diagrama triádico del It"), Charles Sanders Peirce (1839-1914) emprende un asalto a la ciudadela de la razón, con herramientas consistentemente *triádicas y continuas* que le van a llevar, al final de su vida, a elaborar una incisiva extensión de lo tildado como "racional". Alrededor del *summum bonum* de la estética (crecimiento continuo de la potencialidad), Peirce explora una *reasonableness* que contrasta (y conecta), en lo profundo, lo lógico y lo topológico. La arquitectónica triádica de las ciencias, según Peirce, sitúa a las matemáticas (y la topología) en un nivel de primeridad (*firstness*), mientras que la lógica se sitúa *posteriormente* en un nivel 2.2.3 (*thirdness of second secondness*).

---

[1] B. RIEMANN, *Principes fondamentaux pour une théorie générale des fonctions d'une grandeur variable complexe* (traducción de *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*, Tesis Doctoral, 1851), in ID., *Oeuvres mathématiques*, Gauthier-Villars, Paris 1898 (reimpresión Jacques Gabay, Paris 1990), pp. 1-60.

Así, la racionalidad clásica se eleva, no sólo sobre un continuo matemático y topológico (nivel 1.3), sino sobre la estética misma (nivel 2.2.1). La *inversión* es imprescindible, y de enorme interés para nuestro mundo contemporáneo. De esta manera, una "filosofía analítica (lógica)" de las matemáticas aparece de entrada como un *contrasentido* en el sistema de Peirce, mientras que una "filosofía sintética (topológica)" de las matemáticas parece tener, en cambio, más sentido.

En los *gráficos existenciales* de Peirce, el *análisis*, la *síntesis*, y una tercera vía, la *horosis* (según Roberto Perry), entran en juego[2]. La descomposición del razonamiento buscada por Peirce es insistentemente analítica, y Peirce consigue detectar realmente los *arquetipos* de la praxis lógica: *reglas universales* (inserción, borramiento, iteración, desiteración, doble corte) que, aplicadas a distintos lenguajes gráficos, dan lugar al cálculo proposicional usual, a la lógica relacional de primer orden y a diversas lógicas modales. Sin embargo, allende esa descomposición analítica, los modelos naturales de los gráficos viven en el plano complejo (o en superficies de Riemann generales, conjeturamos), y su sentido matemático es esencialmente *continuo y topológico* (algo demostrado por Arnold Oostra, al construir *gráficos existenciales intuicionistas*[3], cuyos modelos naturales residen en espacios topológicos y no en álgebras booleanas). El *continuo sintético* peirceano entra entonces en diálogo con las formas "normales" de la razón (cálculo clásico) y las expande a una más plena *razonabilidad topológico-intuicionista*.

3. *Grothendieck: la invención matemática de las mediaciones arquetípicas*

Utilizando dos de las invenciones matemáticas más potentes del siglo XX, la teoría de *haces* y la teoría de *categorías*, Alexander Grothendieck (1928-2014) ha revolucionado completamente el panorama de las matemáticas contemporáneas[4]. Gigantesco constructor (¡más de mil nuevas definiciones en matemáticas!) y excepcional vidente (muchos de los desarrollos actuales de las matemáticas se inscriben en problemáticas abiertas por él), Grothendieck ha renovado completamente nuestras percepciones de los conceptos básicos de la matemática: *(i)* el número (*esquemas*), *(ii)* el espacio (*topos*), *(iii)* la forma (*motivos*). Gracias a construcciones universales y nuevas nociones de equivalencia (a través de los *arquetípicos categóricos* definibles mediante el cuantificador *existe único*), Grothendieck ha propuesto ciertos cálculos *abstractos suaves*, donde *(i)* allende enteros separados, se observan pegamientos plásticos, *(ii)* allende puntos locales, se estudian proyecciones globales, *(iii)* allende una multiplicidad indiscernible de cohomologías, se encuentran motivos unitarios.

---

[2] F. ZALAMEA, *Peirce's Logic of Continuity*, Docent Press, Boston MA 2012.

[3] A. OOSTRA, *Los gráficos Alfa de Peirce aplicados a la lógica intuicionista*, in "Cuadernos de Sistemática Peirceana", 2 (2010), pp. 25-60.

[4] Para breves introducciones a su obra, véanse F. ZALAMEA, *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas*, Universidad Nacional, Bogotá 2009 (traducciones extendidas: *Synthetic Philosophy of Contemporary Mathematics*, Sequence, New York NY 2012; *Philosophie synthétique des mathématiques contemporaines*, Metis-Presses, Genève 2017); F. ZALAMEA, *Alexander Grothendieck, 1928-2014 (obituario)*, in "Lecturas Matemáticas", 36 (2015), pp. 93-102.

Debe observarse aquí una fundamental *inversión metafísica*: en contra de la tradición usual, los enteros, los puntos y las cohomologías resultan ser constructos *ideales*, mientras que las *secciones correspondientes en los haces* emergen como mucho más *reales*. En realidad, allende las lecturas analíticas "normales" (entero, punto), existe todo un *continuo sintético* donde se inscriben mejor los conceptos de la matemática. Es el contenido del *Lema de Yoneda*: toda categoría (discreta) razonable se sumerge en una categoría (continua y completa) de *prehaces*, y la imagen de cada objeto de la categoría inicial resulta ser el límite de los prehaces cercanos a él. Así, el objeto *ideal* inicial ("funtor representable") puede verse a través de la *aproximación nocturnal* de los prehaces "fantasmales" (mucho más *reales*, diría Gödel) que le circundan. La fuerza metodológica de la inversión grothendickiana es considerable: la pulsación de lo categórico-relacional *enriquece* el espectro de lo racional, y, en el mundo de las síntesis, se observan construcciones y eventos *invisibles* desde aproximaciones puramente analíticas.

4. *Lógica de haces*

El concepto de *haz matemático* surge en la obra de Jean Leray (curso de topología algebraica en el Oflag XVII [1943-45], serie de notas en los *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* [1946], cursos sobre sucesiones espectrales en el *Collège de France* [1947-50]) y alcanza su desarrollo definitivo en el famoso Seminario de Henri Cartan en la *École Normale Supérieure* (1948-51). Un haz es un tipo de objeto matemático que permite pegar globalmente aquello que resulta ser traslapable coherentemente dentro de lo local. Ciertos objetos matemáticos pueden entonces entenderse mejor gracias a una lógica de *vecindades y mediaciones* sobre un espacio *continuo* (descartando binarismos sí-no), y gracias a acciones naturales de grupoides en las fibras del haz. De manera más precisa, un *haz topológico* consiste en un par de espacios topológicos, conectados por una *proyección p e*ntre ellos (pensemos en el dominio de la proyección como un espacio "superior", que se *despliega* sobre el codominio de la proyección, el espacio "inferior" o "base"), con ciertas propiedades de buen comportamiento local para *p* ("homeomorfismo local"). Las *fibras* del haz son las preimágenes bajo *p* de los *puntos* de la base, o, dicho de otra manera, los fragmentos del espacio superior que se *pliegan* sobre los puntos de la base.

La problemática esencial en el haz consiste, entonces, en estudiar los procesos de *pliegue y despliegue* de la información matemática cifrada en el haz. En particular, resulta primordial conocer las *inversas* de la proyección definidas sobre vecindades de la base (*secciones locales*) y preguntarse cómo (si fuese posible) pueden *pegarse* diversas secciones locales en una *sección global* (definida sobre toda la base, o sobre una porción muy amplia de ella). Un ejemplo paradigmático de haz está ligado con los trabajos de Riemann en variable compleja. El *haz de gérmenes de funciones holomorfas* se define situando al plano complejo[5] en la base, y especificando las componentes de las fibras sobre un punto *z* vía clases de equivalencia ("gérmenes") de funciones holomorfas que coincidan en una vecindad de *z*. Resulta entonces que la *continuación analítica* de Riemann en el plano asegura (y es equivalente a) la *separación* (Hausdorff) del haz de gérmenes.

[5] T. NEEDHAM, *Visual Complex Analysis*, Oxford University Press, Oxford 1997.

La extrapolación de la teoría de los *contactos* y los *pasajes*[6] en los haces – que permite *ascender y descender* entre lo particular y lo universal, entre lo local y lo global, entre lo concreto y lo genérico – da lugar a nuevas formas de expresión para el pensamiento de lo múltiple y lo uno. Los haces permiten descubrir ciertos invariantes detrás de los tránsitos, genericidades allende lo particular, estabilidades globales allende las obstrucciones locales, integralidades parciales allende lo meramente diferencial. Correspondiente con lo que hará Grothendieck unos pocos años después desde perspectivas categóricas más generales, en la teoría de haces se produce así una notable *inversión lógica*, según la cual lo puntual, lo atómico, lo diferencial – subsumidos bajo la lógica *clásica* – no son más que invenciones ideales, sin sustentos topológicos en la física real, mientras que las vecindades, las pragmáticas integrales, las oscilaciones de los flujos – subsumidas bajo la lógica *intuicionista* – pasan a ser mucho más reales que los conceptos, supuestamente correctos, que han gobernado hasta el momento nuestra aproximación analítica al mundo.

En el entronque con nuestra *transmodernidad* en curso[7], la lógica de haces puede empezar a servir entonces de valioso paradigma para nuestro tiempo. Así como la lógica clásica, apropiada para disecciones atómicas y diferenciales, se enlazó de manera natural con la filosofía analítica a comienzos del siglo XX (Russell, Wittgenstein), no es difícil augurar que la *lógica de haces*, más apropiada para el tránsito de los fluidos y para las reintegraciones de lo híbrido y lo antinómico[8], pueda enlazarse con fuerza, en un debido momento, tal vez ya no muy distante, con la emergencia de la *transmodernidad* a comienzos del siglo XXI. Una *razón amplia* ("razonabilidad" = razón + sensibilidad, al estilo de Vaz Ferreira)[9] se abre en efecto a un tejido reticular de *constelaciones en transformación* permanente, con incesantes tránsitos pluridireccionales y plurimodales. Los cruzamientos, las hibridaciones, la pluralidad interconectada, entran a constituir una red compleja entre lo particular y lo universal, donde la lógica de haces, con su extraordinaria capacidad para *medir pasajes y obstrucciones* estará llamada a jugar un papel determinante para las generaciones futuras.

5. *Riemann, Peirce, Grothendieck bajo la lógica de haces*

Recordemos que el *summum bonum* peirceano, el ideal de la estética, postula un *crecimiento continuo de la potencialidad*. Se trata de un ideal de belleza que se puede vivir en carne propia, por ejemplo, al observar en Torino la cúpula de *San Lorenzo* de Guarino Guarini. La multiplicidad de residuos, enlaces, transformaciones, quiasmas, inversiones en *San Lorenzo* nos deja vislumbrar "algo más", un verdadero despliegue de la imaginación geométrica, que entra en semiosis continua con el arte, la matemática, la teología. De

[6] W. BENJAMIN, *Opere Complete IX – I "passages" di Parigi* (1927-40), Einaudi, Torino 2000.
[7] R.M. RODRÍGUEZ MAGDA, *La sonrisa de Saturno. Hacia una teoría transmoderna*, Anthropos, Barcelona 1989; R.M. RODRÍGUEZ MAGDA, *Transmodernidad*, Anthropos, Barcelona 2004.
[8] F. ZALAMEA, *Antinomias de la creación. Las fuentes contradictorias de la invención en Valéry, Warburg, Florenski*, Fondo de Cultura Económica, Santiago de Chile 2013.
[9] C. VAZ FERREIRA, *Lógica viva*, Biblioteca Ayacucho, Caracas 1910 (reed. Biblioteca Ayacucho, Caracas 1979).

manera similar, el *filtro de la lógica de haces* nos permite observar bajo una *perspectiva unitaria* (1) el revés y las ramificaciones de Riemann, (2) el continuo y las aproximaciones pragmáticas de Peirce, (3) la mediación y las fronteras arquetípicas de Grothendieck.

En efecto, *(i)* los residuos negativos (Riemann) impulsan *(ii)* el potencial de la alteridad (Peirce), que se transforma relativamente en *(iii)* un vaivén creativo (conexión de Galois, adjunción, *back-and-forth*) en la frontera entre ciertas polaridades (Grothendieck). Los haces captan precisamente ese proceso *(i)-(iii)*, imaginando los residuos como *puntos* de la base, los despliegues de la alteridad como *fibras*, y los vaivenes creativos como *secciones*. Por otro lado, *(i)* las ramificaciones (Riemann) potencian *(ii)* la semiosis ilimitada (Peirce), que permite *(iii)* la transición y la traducibilidad de los saberes (Grothendieck). Una vez más, se trata de un proceso propio de la *lógica de haces*, donde partimos de unos *puntos de ramificación* sobre una superficie de Riemann, para estudiar las *fibras de signos* sobre esos puntos, y proponer pegamientos de información (*secciones*) entre ellas.

De esta manera, el "punto más alto de la razón" según Merleau-Ponty, el *desliz* del Hombre en el encuentro con la Naturaleza, se acopla bien a una lógica dinámica – atenta a residuos, enlaces, transformaciones, quiasmas, inversiones, como en el Guarini – que puede cifrarse bien en la lógica de haces. Los *confines antinómicos* de ese desliz, de ese movimiento, pueden captarse mejor con una lógica no clásica, no rígida, como es la lógica de haces. El *continuo fenomenológico*, por último, se acopla bien con la base continua y las rupturas de simetría propias de una lógica abierta al cambio.

Agradecimientos

Agradezco a Giovanni Maddalena y Enrico Guglielminetti por la gentil invitación a participar en este número de "Spazio Filosofico". El núcleo de las ideas aquí expresadas fue presentado el 6 de Octubre de 2016 en la Università di Torino, en una reunión coordinada por los Profesores Maddalena, Guglielminetti y Rosboch. La combinación de la finísima inteligencia turinesa de mis anfitriones, unida con la elegancia nocturnal de la ciudad, las atmósferas de Pavese y la arquitectura de Guarini, resultó ser para mí una *experiencia sintética inolvidable*.