Topologia e Astrazione. La Geometria Senza Punti di A.N. Whitehead

Nicola Turrini

È stato assegnista di ricerca in filosofia teoretica presso l'Università di Verona. I suoi interessi di ricerca riguardano principalmente le relazioni tra filosofia e matematica, con particolare attenzione alle forme di ragionamento diagrammatico e alla teoria della computazione.

nicola.turrini@univr.it

Euclidean definition of a point as "that which has no parts" has been a major source of debate regarding the epistemological and ontological assumptions of classical geometry, from the Middle Ages to the full development of point-free geometries and topologies in the 20th century. These theories are based on the general idea that the logical-mathematical and philosophical domain of discourse regarding points as supposedly lower-dimensional entities must be reshaped in terms of appropriate higher-order constructs that address only regions or extended bodies. This article focuses on what is undoubtedly the first comprehensive proposal of this kind – A.N. Whitehead's theory of "extensive abstraction" – offering a synthetic reconstruction of its formal evolution: from the first purely mereological version, through the revisions presented in the late 1920s, to the final, topological formalization in *Process and Reality*. Starting from these considerations, in conclusion some considerations will be made on the role of abstraction in Whitehead's philosophy of process.

— ABSTRACTION
— POINT-FREE GEOMETRY
— POINT-FREE TOPOLOGY
— PROCESS PHILOSOPHY

Philosophy Kitchen. Rivista di filosofia contemporanea
#24, I/2026, 107 — 123

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Gli *Elementi* di Euclide contengono la prima formulazione della geometria euclidea e rappresentano, senza dubbio, una delle opere più influenti di tutta la storia della matematica. Il concetto di *elemento* – il cui plurale στοιχεία dà il nome al celebre trattato – incarna, proprio a partire dalla filosofia greca antica, l'idea di un componente primo e non ulteriormente analizzabile.

Sebbene la geometria euclidea sia sopravvissuta pressoché intatta sino ai giorni nostri, i suoi fondamenti hanno seguito una storia più intricata. Da una parte, alcune proposte alternative si sono concentrate sul piano assiomatico – in particolare sul quinto postulato di Euclide – la cui riformulazione o la cui negazione hanno inaugurato lo sviluppo delle geometrie non euclidee del XIX secolo; dall'altra, la definizione euclidea di punto come *ciò che non ha parti* è stata invece il punto di partenza per una revisione dei presupposti ontologici ed epistemologici della teoria: si tratta di una tradizione che ha una lunga storia, che dal dibattito medievale e moderno sull'indivisibilità è giunto fino alle geometrie e alle topologie *point-free* che si sono pienamente sviluppate nel XX secolo.

A differenza delle geometrie non euclidee, una geometria senza punti non ambisce a fornire un'alternativa a quella euclidea, ma propone una nuova interpretazione e una nuova fondazione della geometria, *lato sensu*, in cui tutte le nozioni di base sono esprimibili in termini di *regioni estese* (cfr. Gerla 2021). Proprio per questo motivo, il concetto di punto non viene eliminato ma recuperato come «high-order construct» (Varzi 2021, 347) a partire dal quale è possibile riformulare tutte le altre nozioni geometriche: «a geometry in which points are treated as derived, well-behaved ontological artifacts» (Varzi 2021, 348).

Esistono numerosi metodi per raggiungere questo obiettivo, ma la prima proposta completa in questa direzione risale alle ricerche di Alfred North Whitehead sulla geometria come scienza fisica e sulla fondazione empirica dello spazio – inteso non come entità astratta, ma come costrutto derivato da relazioni fisiche e percezioni. [1] Le motivazioni specifiche che le hanno ispirate, di ordine non solo matematico ma anche epistemologico e metafisico, non sono necessariamente condivise da altre teorie *point-free*; ciononostante, le idee di Whitehead si sono dimostrate di enorme influenza. [2]

[1] Storicamente la prima proposta si ritrova nel lavoro del matematico russo Nikolaj Lobačevskij (1792-1856), il quale concepì la propria geometria non euclidea come priva di punti; la sua idea, tuttavia, è soltanto accennata e i dettagli della sua teoria continuano a intendere la nozione di punto come primitiva.

[2] Per una letteratura critica essenziale cfr. Stebbing (1930), Lawrence (1950; 1956), Lowe (1950; 1962), Mays (1952; 1959), Palter (1960), Hurley (1979), Fitzgerald (1979), Kraus (1979), Clarke (1985), Hampe (1991), Gerla & Tortora (1996), Biacino & Gerla (1996), Ridder (2001; 2002), Durand (2007; 2008), Gerla & Miranda (2008), Ringel (2008) e Bostock (2010).

L'origine del metodo dell'astrazione estensiva

Whitehead presenta per la prima volta il suo metodo nell'aprile del 1914, durante un intervento al *Congrès International de Philosophie Mathématique* di Parigi. Il testo della conferenza venne successivamente pubblicato nel 1916 in traduzione francese, con il titolo *La théorie relationniste de l'espace* [TRE]. Il metodo viene sottoposto a diverse revisioni nei due libri successivi, *An Enquiry Concerning the Principles of Natural Knowledge* [PNK] e *The Concept of Nature* [CN] – dove viene ufficialmente denominato "method

of extensive abstraction" – e prende la sua forma definitiva nella parte IV di *Process and Reality* [PR].

Gli sviluppi del metodo posteriori alla conferenza del 1914 seguono le differenti fasi dell'evoluzione del pensiero di Whitehead, rendendone talvolta complicata l'interpretazione: pur avendo un'origine essenzialmente logico-matematica, il metodo rimane costantemente ancorato alle più generali preoccupazioni speculative del filosofo inglese, e di conseguenza le trasformazioni di queste ultime finiscono per influire sul primo. Specularmente, la struttura logico-matematica del metodo ha permesso a Whitehead di utilizzarlo per ispezionare e modificare la propria filosofia.

Tornando al metodo, dopo i lavori dedicati all'assiomatica della geometria proiettiva e descrittiva (Whitehead 1906b, 1907) si può ragionevolmente affermare che le istanze originarie di TRE, in particolare la necessità di una fondazione *point-free* della geometria – in cui i punti sono costrutti di ordine superiore e non entità primitive – non vennero mai meno nelle successive formulazioni.

È possibile isolare alcune istanze principali della teoria, che rispondono a diverse preoccupazioni speculative di Whitehead. La prima è legata all'adesione alla *concezione relazionale dello spazio*, cioè all'idea per cui le entità geometriche emergono dalle *relazioni* tra oggetti ed eventi concreti; un'idea che, secondo il filosofo britannico, non era conciliabile con la nozione euclidea di punto. Questo orientamento era già presente in un *memoir* del 1906 – *On Mathematical Concepts of the Material World* – dove l'idea di una fondamentale incompatibilità con la nozione primitiva di punto è decisamente evidente. [3]

È tuttavia in TRE che la teoria relazionale dello spazio comincia gradualmente ad articolarsi in maniera più organica, coinvolgendo sia lo spazio apparente degli oggetti così come essi ci appaiono sia lo spazio delle scienze fisiche. L'affermazione di incompatibilità cessa così di essere un problema meramente logico e diventa parte integrante dello sviluppo di una teoria senza punti.

Una teoria relazionale dello spazio richiede che i punti siano entità complesse, posizioni non assolute, funzioni logiche ed epistemologiche delle relazioni tra gli oggetti che costituiscono lo spazio:

> La géométrie comme théorie mathématique, a coutume de prendre pour point de départ tout ou partie des entités spatiales fondamentales, points, lignes courbes ou droites, surfaces et volumes. Elle les prend comme idées simples primitives, c'est-à-dire, en langage abstrait, comme des 'variables' qui ne sont pas logiquement fonctions de variables plus simples. Mais si la théorie relationniste de l'espace est adoptée, soit pour le monde apparent, soit pour le monde physique, cela ne peut pas être la première étape de la recherche géométrique. Pour la théorie relativiste de l'espace, il est essentiel que les points, par exemple, soient des entités complexes, fonctions logiques de ces relations entre objets qui constituent l'espace. Car, si un point est une chose simple, incapable d'être logiquement définie au moyen de relations entre objets, alors les points sont, en fait, des positions absolues. (TRE, 429-430)

[3] Questa prima tecnica – denominata "theory of interpoints" – si propone di ricavare la nozione di punto a partire da estensioni lineari (e non regionali, come accadrà successivamente) convergenti che contrappongono l'estensione all'adimensionalità del punto euclideo. La teoria degli interpunti ha una connotazione puramente logica e sarà immediatamente abbandonata da Whitehead; tuttavia, la necessità di una rigorosa fondazione assiomatica della geometria euclidea che non faccia riferimento ai punti come unità primarie indivisibili e che sia adeguata agli sviluppi della fisica (quindi applicabile al mondo materiale) è presente nel memoir. Ad esempio, discutendo delle classi di "linear objective reals" – realtà ultime lineari che Whitehead utilizza per definire i punti – egli si esprime così: "a closer specification of the linear objective reals of these concepts is to say that they are the lines of force of the modern physicist, here taken to be ultimate unanalysable entities which compose the material universe" (Whitehead 1906a, 482). In questo saggio emergono già le criticità di una concezione dello spazio costituito da unità indivisibili e non percepibili e i punti sono considerati entità complesse. Per una discussione del memoir si vedano Mays (1961; 1977), Grattan-Guinness (2002), e Leclercq (2011).

Simili considerazioni si ritrovano in diversi articoli scritti in quegli stessi anni (cfr. Whitehead 1916b, 1916c, 1917), dove la teoria relazionale precedentemente ispirata a Leibniz viene gradualmente modificata da considerazioni di ordine speculativo legate alla teoria della relatività di Albert Einstein. [4] Quest'idea ritornerà nei trattati successivi dove la natura complessa dei punti viene presentata come un'implicazione diretta della teoria relazionale dello spazio (e del tempo):

[4] Whitehead aveva una conoscenza molto approfondita della teoria di Einstein, di cui sviluppò anche una sua versione alternativa, inizialmente delineata in Whitehead (1920b) e in CN, e presentata in forma definitiva in Whitehead (1922).

> Thus if space be nothing but relations between material bodies, points as simple entities disappear. For a point according to one type of observation is a track of points according to another type. (PNK, 31)
> If you admit the relativity of space, you also must admit that points are complex entities, logical constructs involving other entities and their relations [...]. The theory of the relativity of space is inconsistent with any doctrine of one unique set of points of one timeless space. (CN, 136)

La seconda istanza ha invece un carattere prettamente epistemologico e riguarda, in particolare, il modo di intendere la filosofia della scienza da parte di Whitehead. Si tratta di una postura paradigmatica, che riflette il suo interesse per un'epistemologia radicalmente empirista. Per quanto già rintracciabili nel *memoir* del 1906 – anche se parzialmente eclissate da un'impostazione decisamente logico-matematico – le preoccupazioni epistemologiche di Whitehead emergono distintamente in TRE, e negli scritti successivi diventano la ragione principale per mettere in discussione la concezione tradizionale di punto. PNK fornisce una delle affermazioni più chiare a riguardo, riconoscendo nel carattere dei dati immediati della percezione il punto di inizio di ogni discussione attorno ai fondamenti di questa disciplina:

> An investigation into the foundations of geometry has to explain space as a complex of relations between things. It has to describe what a point is, and has to show how the geometric relations between points issue from the ultimate relations between the ultimate things which are the immediate objects of knowledge. Thus the starting point of a discussion on the foundations of geometry is a discussion of the character of the immediate data of perception. It is not now open to mathematicians to assume *sub silentio* that points are among these data. (PNK, 5)

La seconda istanza sembra quindi fondarsi sulla prima. L'incorporazione della concezione relazionale dello spazio (richiesta dalla teoria della relatività) – o, più precisamente, l'incorporazione di una teoria generale della relazione che potremmo definire *strutturale* – nella propria filosofia, conduce Whitehead a mettere in discussione alcuni aspetti della propria filosofia e al tempo stesso a misurarne le implicazioni filosofiche (e logico-matematiche) all'interno delle diverse aree della sua vasta ricerca.

La posta in gioco è, in questo caso, più generale e chiama in causa le convinzioni di Whitehead sul ruolo fondamentale dell'osservazione nella scienza, che egli intendeva come «the thought organization of experience» (1916c, 411), laddove "organization" deve intendersi come effetto di una costruzione speculativa. Ma le stesse costruzioni scientifiche non possono che seguire la stessa sorte della geometria nel passo di PNK appena citato,

e devono considerarsi «merely expositions of the characters of things perceived» (CN, 57, 148); proprio come i punti della geometria euclidea sono «a metaphysical fairy tale by any comparison with our actual perceptual knowledge of nature» (PNK, 6). La rilevanza data al campo della percezione rivela così che la geometria, in quanto *costruzione scientifica*, deve coinvolgere una qualche forma di *astrazione*; e, di conseguenza, una rigorosa ricerca sui fondamenti della geometria deve mostrare fino in fondo il carattere astratto di quella che è comunque "fiction" (Whitehead 1917, 163). In questa analisi di Whitehead è possibile apprezzare la profondità del ragionamento, che si muove al tempo stesso sul piano ontologico, logico-matematico ed epistemologico; Whitehead non intende solo rigettare l'ipotesi indivisibilista implicita nella geometria euclidea ma vuole definire un metodo generale per recuperarne la verità su basi empiricamente accettabili.

La terza istanza, che dovrebbe ormai apparire ovvia, concerne il ruolo e la natura dell'*astrazione* stessa all'interno della più generale "thought organization of experience". Come avrà successivamente modo di sottolineare in *Modes of Thought* [MT], «[the] possibility of abstraction, whereby individuals and the forms of process constituting their existence can be considered separately, brings out a fundamental intuition which lies at the basis of all thought» (MT, 99).

La geometria, quindi, non è l'unica disciplina a fornirci un quadro potenzialmente ingannevole. Whitehead è convinto che mostrare questo tipo di criticità generali sia uno degli obiettivi primari di una filosofia scientifica, e di quella pratica che in *Process and Reality* definirà "speculative philosophy": mostrare la *connessione sistematica* tra la limpida armatura strutturale del "world of ideas" della scienza e il campo multiforme e imprevedibile delle "sensible experiences" da cui tuttavia la scienza non può che avere inizio (Whitehead 1916, 41). Connessione sistematica (che in PR diviene processuale) e non insieme (statico-atomico) di elementi.

Whitehead ritorna spesso su questo compito, e non è un caso che due dei suoi più noti obiettivi critici siano due fallacie che coinvolgono proprio l'astrazione: (i) la "fallacy of misplaced concreteness", che si presenta ogniqualvolta scambiamo le costruzioni astratte utilizzate nella scienza e nella matematica per i fatti concreti da cui esse emergono (1916, 64); e (ii) la "fallacy of simple location", che consiste nel presumere che la realtà di un oggetto sia definita esclusivamente dalla sua posizione assoluta e isolata nello spazio e nel tempo, senza fare riferimento ad altre regioni dello spazio e del tempo. [5]

Le astrazioni coinvolte nella geometria non fanno quindi eccezione; e uno degli aspetti notevoli del metodo dell'astrazione estensiva elaborato da Whitehead è proprio quello di ambire non solo a fornire una fondazione *point-free* della geometria, ma anche un modo per evitare fallacie e astrazioni scientifiche fuorvianti.

[5] La seconda fallacia deriva evidentemente dalla prima, poiché l'errore consiste per l'appunto nel trattare il concetto *astratto* di posizione come se fosse la realtà *concreta*, ignorando l'interconnessione dell'oggetto e la sua relazione con altri oggetti.

L'idea base del metodo

l'idea fondamentale che orienta il metodo di Whitehead è, in fondo, piuttosto semplice anche se potrebbe risultare controintuitiva se non si comprendono alcune tecniche in uso nella matematica. In *The Organisation of Thought* l'idea viene sintetizzata con queste parole: «A point is the

class of extended objects which, in ordinary language, contain that point» (Whitehead 1916c, 418). Si tratta di una definizione che, a prima vista, potrebbe sembrare impredicativa – e quindi circolare – ma, come vedremo più avanti, non è questo il caso.

La definizione di Whitehead è ovviamente troppo semplicistica, dal momento che sorvola sulle modalità di identificazione delle classi in gioco. In TRE Whitehead aveva fornito una prima descrizione del suo metodo come un'applicazione della teoria generale delle serie convergenti presentata nel secondo volume dei *Principia Mathematica;* [6] l'idea è per l'appunto quella concepire il punto come una classe convergente di regioni estese, contenute una nell'altra e che decrescono indefinitamente fino a «converge toward a *conceptual* limit» (TRE, 698 corsivo mio).

[6] Cfr. Whitehead & Russell (1910-1913, parte V, sezione C).

Nel capitolo di CN dedicato all'analisi della temporalità – discutendo le serie composte di estensioni temporali (durate) – Whitehead fornisce un'immagine intuitivamente efficace di una siffatta classe convergente come un insieme infinito di corpi estesi "packed one within the other like the nest of boxes of a Chinese toy" ma senza la scatola più piccola: [7]

[7] In CN 52 lo stesso metodo viene applicato anche alle serie di eventi.

> We are now prepared to proceed to the definition of a moment of time. Consider a set of durations all taken from the same family. Let it have the following properties: (i) of any two members of the set one contains the other as a part, and (ii) there is no duration which is a common part of every member of the set. [...] The series may start with any arbitrarily assumed duration of any temporal extension, but in descending the series the temporal extension progressively contracts and the successive durations are packed one within the other like the nest of boxes of a Chinese toy. But the set differs from the toy in this particular: the toy has a smallest box which forms the end box of its series; but the set of durations can have no smallest duration nor can it converge towards a duration as its limit. For the parts either of the end duration or of the limit would be parts of all the durations of the set and thus the second condition for the set would be violated (CN, 40).

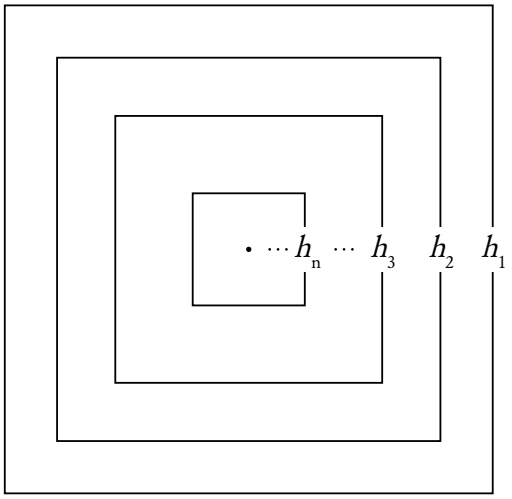
Il punto essenziale risiede nella natura *concettuale* del limite della serie che, in quanto «non-existent ideal» (1919b, 47), non viene mai raggiunto; ed è ovviamente in questo senso che deve intendersi la non esistenza di un minimo logico corrispondente alla concezione euclidea del punto come entità assolutamente priva di parti:

> nous n'avons pas besoin d'une définition logiquement simple des points, lignes et surfaces, mais de définitions qui conservent les propriétés générales et simples qui leur sont attribuées en géométrie, et qui permettent aussi de leur substituer les concepts approximatifs de point (par exemple) dans les propositions approximatives des domaines plus simples de pensée où les concepts fondamentaux apparaissent. (TRE, 433).

Poiché il limite può essere definito in modo univoco, la serie stessa nel suo insieme – che Whitehead chiama «serial-inclusion class» o «abstractive class» [8] – può essere trattata come un punto; lo stesso procedimento vale chiaramente per qualsiasi altra entità di ordine inferiore propria della geometria ordinaria.

[8] Il primo termine è usato in TRE; il secondo (o la sua variante "abstractive set") è il termine più frequentemente usato in PNK, CN e PR.

Il semplice diagramma spaziale presentato in PNK



[FIG. 1] Una classe astrattiva di quadrati concentrici che convergono verso un punto ideale.

restituisce bene l'idea generale di Whitehead. [FIG. 1] [9] Immaginiamo una serie di quadrati concentrici e indichiamo le lunghezze dei lati dei quadrati successivi (in ordine di dimensione decrescente) con h_1, h_2, h_3, ..., h_n, ... Con h_n che tende a 0 al crescere indefinito di n, ogni quadrato si estenderà su tutti i quadrati successivi dell'insieme, che formerà così una classe astrattiva che converge nel loro centro comune, un punto.

[9] Il diagramma originale è stato in questo caso modificato per renderlo più esplicito.

Il cuore del metodo di Whitehead risiede proprio nel fatto che i limiti di queste serie convergenti *non sono elementi delle classi che li definiscono;* se fosse altrimenti, un punto sarebbe un quadrato o un cubo. Tali limiti non esistono, ci sono solamente regioni o volumi estesi: punti, linee, superfici non sono i limiti di tali serie, bensì le serie stesse – o, per essere più precisi, le loro classi di equivalenza.

Come ha mostrato Charlie D. Broad, l'idea di utilizzare le serie convergenti non è nuova, ma è essenzialmente l'applicazione di un principio frequentemente utilizzato in matematica. Intuitivamente verrebbe da considerare i limiti delle serie in oggetto, ma, poiché non c'è alcuna garanzia che i limiti delle classi esistano, è naturale considerare le classi astrattive per il medesimo scopo:

> It does not in the least matter to science what is the inner nature of a term, provided it will do the work that is required of it. If we can give a definition of points which will make them fulfil a certain pair of conditions, it will not matter though points in themselves should turn out to be entities of a very different kind from what we had supposed them to be. The two conditions are (i) that points must have

> to each other the kind of relations which geometry demands; and (ii) that points must have to finite areas and volumes such a relation that a reasonable sense can be given to the statement that such areas and volumes can be exhaustively analysed into sets of points. Any entity that answers these conditions will do the work of a point, and may fairly be called a point, no matter what its other properties may be. (Broad 1923, 39)

Broad riconosce per altro il ruolo chiave, già menzionato, della caratterizzazione *relazionale* ed evidentemente *strutturale* della teoria dell'astrazione estensiva: «This important fact, that *what really matters to science is not the inner nature of objects but their mutual relations* [...], was first recognised in pure mathematics. Whitehead's great merit is to have applied it to physics» (Broad 1923, 39 corsivo mio).

Intermezzo

Nel nostro caso, la spiegazione intuitiva necessita di alcuni chiarimenti, ed è esattamente qui che l'analisi di Whitehead mostra la sua originalità non solo sul piano filosofico ma anche su quello formale.

La scelta di identificare i punti con insiemi di regioni estese ci induce a ipotizzare l'esistenza di molte serie di regioni differenti che intuitivamente convergono verso lo stesso limite; un punto potrebbe essere identificato come una serie convergente di cerchi, di cubi o di palle concentriche. [10] In una simile situazione, la scelta di una serie piuttosto che un'altra sembrerebbe assolutamente arbitraria, mentre sarebbe in linea di principio più naturale identificare il punto con tutte le serie che intuitivamente convergono verso lo stesso limite. Whitehead, che ambiva a fornire una definizione il più generale possibile, era consapevole di tale complicazione e della necessità di avere a disposizione un modo per identificare le serie senza far riferimento ai loro limiti.

La soluzione di Whitehead, anche in questo caso già riconoscibile in TRE, sarà quella di evitare la scelta arbitraria di una classe astrattiva specifica definendo una relazione di equivalenza tra classi astrattive – una classe di equivalenza per l'appunto – adatta a identificare tutte le serie che ci interessano. In questo modo, i punti potranno essere definiti come classi di equivalenza di classi astrattive. [11]

L'appropriata relazione di equivalenza può essere informalmente definita attraverso le nozioni di *copertura* e *inclusione*. Un insieme di regioni A copre un insieme di regioni B quando ogni elemento di A include o si estende su qualche elemento di B, ossia quando contiene qualche elemento di B come parte propria. [12] Ora, la nozione di "copertura [*covering*]" diviene particolarmente significativa quando A è una classe astrattiva infinitamente convergente, come accade nella metafora delle scatole cinesi; in questo caso B dovrà avere

[10] Una strategia per evitare questo problema sarebbe quella di selezionare una serie arbitraria; d'altronde, come ricorda Broad, non ci interessa quale sia la natura intrinseca di una struttura, purché essa svolga la funzione che gli è richiesta. Alfred Tarski, ad esempio, utilizza questa soluzione nel suo tentativo di assiomatizzare la geometria euclidea senza fare riferimento ai punti come concetto primitivo (cfr. Tarski 1929). Lavorando nello spazio tridimensionale, Tarski usa il termine "sfera" (ciò che comunemente, in matematica, si chiama "palla") come primitivo e definisce un punto geometrico come la classe di tutte le sfere che sono concentriche rispetto a una sfera data; la scelta di Tarsky è arbitraria proprio perché avrebbe potuto usare un altro solido come primitivo ma il risultato sarebbe stato equivalente.

[11] Una teoria matematica considera determinate proprietà e relazioni. Data una certa relazione di equivalenza, proprietà e relazioni che non distinguono tra di loro gli oggetti appartenenti ad una medesima classe di equivalenza prendono il nome di invarianti di classe – cioè strutture invarianti rispetto alla relazione di equivalenza o partizione adottata. Nel suo tentativo di definire i punti come classi di equivalenza Whitehead sta operando in modo evidentemente strutturale, identificando quindi opportune strutture invarianti.

[12] Il termine "inclusione [*inclusion*]" è utilizzato sia in TRE che in PR; in PNK e CN Whitehead preferisce invece "si estende su [*extends over*]".

un numero infinito di elementi e non esisterà alcuna regione inclusa in ogni elemento di *B* (Cfr. PNK, 104-105). Possiamo allora affermare che due insiemi *A* e *B* si copriranno vicendevolmente e di conseguenza saranno inclusivamente uguali o, con un'espressione particolarmente efficace di Whitehead, «equal in abstractive force» (CN, 55). [13]

Ed è proprio nei termini di una relazione di equivalenza che Whitehead ha potuto dare la seguente definizione: un punto non è una classe astrattiva specifica ma è la classe di equivalenza (relativa all'uguaglianza inclusiva) di tutte quelle classi astrattive che – "in ordinary language" – si direbbero convergere verso lo stesso punto. Ancora una volta Whitehead sta applicando tecniche matematiche ben note, in questo caso la definizione di Cantor (1872) che identificava i numeri reali come classi di equivalenza di serie convergenti di numeri razionali. [14]

La metafora della scatola cinese senza fondo è di grande efficacia e coglie perfettamente non solo il senso del metodo, ma anche il suo radicamento in quella legge generale che Whitehead chiamava «law of convergence to simplicity by diminution of extent» (CN, 52): [15]

> This principle extends throughout the whole field of sense-presentation. [...] Thus the point-object in time and the point-object in space, and the double point-object both in time and space, must be conceived as intellectual constructions. The fundamental fact is the sense-object, extended both in time and space, with the fundamental relation of whole-to-part to other such objects, and subject to the law of convergence to simplicity as we proceed in thought through a series of successively contained parts. [...] The origin of points is the effort to take full advantage of the principle of convergence to simplicity. In so far as this principle does not apply, a point is merely a cumbrous way of directing attention to a set of relations between a certain set of thought-objects of perception. (Whitehead 1917, 146, 161ss.)

In questo passo, il concetto chiave è quello di "successively contained parts"; un concetto mereologico già esplicito in TRE, dove la relazione di inclusione viene definita «analogue, dans ses propriétés formelles, à la relation de tout à partie» (TRE 432). [16] Anche in questo caso si può apprezzare la profondità del ragionamento di Whitehead: l'astrazione estensiva è un'istanza della legge della convergenza verso la semplicità così come l'origine del concetto intuitivo di punto consiste nello sfruttare appieno questo stesso principio. Se non si vuole dare per scontata la nozione euclidea di punto è necessario identificare il funzionamento reale delle astrazioni che si celano dietro a tale nozione, e comprendere in modo meno macchinoso la *rete di relazioni* in "a certain set of thought-objects of perception".

Tuttavia, una metafora non può di certo offrire una caratterizzazione formale e rigorosa della nozione chiave di classe astrattiva; è necessario chiarirne i dettagli essenziali. In TRE la nozione di classe astrattiva era definita a partire

[13] In PNK Whitehead utilizza invece il termine "K-equal" (PNK, 105); l'uguaglianza inclusiva è inoltre una relazione di equivalenza (quindi riflessiva, simmetrica e transitiva).

[14] Nella Prefazione del 1910 ai *Principia Mathematica*, il riferimento a Cantor è esplicitamente riconosciuto: «in [...] the theory of series, our whole work is based on that of Georg Cantor» (Whitehead & Russell 1910, ix).

[15] Cfr. CN 82: «This emergence of a definite intrinsic character from an abstractive set is the precise meaning of the law of convergence».

[16] La nascita ufficiale della mereologia viene solitamente attribuita a Stanisław Leśniewski (1916). Come ha segnalato Achille Varzi (2021, 359), se consideriamo che TRE era stato originariamente presentato due anni prima, questa sezione dell'articolo rappresenterebbe il primo vero tentativo di un trattamento rigoroso della relazione parte-tutto, il tema centrale della mereologia. Whitehead probabilmente non conosceva Leśniewski, ma quest'ultimo venne a conoscenza (*via* Tarski) della teoria elaborata in PNK e ne discusse con un certo dettaglio (Leśniewski 1927-1931). Sulla rilevanza di Whitehead per la storia della mereologia si vedano Simons (1991) e Ridder (2002).

dalla relazione di inclusione: un insieme di entità estese è una "abstractive class" (o "serial-inclusion class") se e solo se (i) è ordinata totalmente dalla relazione di inclusione, cioè per ogni coppia dei suoi elementi uno include l'altro, e (ii) non esiste alcun elemento incluso in tutti gli altri elementi (TRE, 443). [17]

[17] Definizioni simili si ritrovano in PNK e CN; come abbiamo già avuto modo di sottolineare, è in CN che la teoria viene ufficialmente denominata "theory of extensive abstraction".

Come si può immaginare, questa definizione svolge il ruolo di analogo formale della metafora delle scatole cinesi: la condizione (i) specifica l'idea che una classe astrattiva sia composta da una serie convergente di estensioni sempre più piccole, mentre la condizione (ii) garantisce che la serie non raggiunga mai il suo limite. Una simile definizione giustifica inoltre le proprietà della relazione di copertura, «forcing inclusion-equality to behave like an equivalence relation» (Varzi 2021, 360). Come ha notato Achille Varzi, «philosophically, this is a crucial step in the development of Whitehead's theory, for it removes any doubt that the appeal to converging series might be circular» (Varzi 2021, 360). In apparenza, infatti, il ragionamento di Whitehead sembrerebbe definire i punti in modo impredicativo, come classi di equivalenza di classi astrattive che convergono su punti; ma come abbiamo già avuto modo di accennare, si tratta solo di un'interpretazione errata: la teoria e la definizione mereologica di classe astrattiva che abbiamo analizzato forniscono infatti le nozioni necessarie per esprimere la nozione di punto coinvolgendo soltanto entità estese e le loro relazioni reciproche, senza fare alcuna nessuna menzione dei punti.

"The Intricacies of Tangency". La formulazione finale di *Process and Reality*

Fino all'inizio della lavorazione di PNK, il filosofo di Ramsgate è convinto della completezza della propria teoria. Tuttavia, si rende ben presto conto che la definizione mereologica di classe astrattiva è imperfetta; inizia quindi ad affrontare il problema in PNK e vi torna in CN, dove si trova forse una delle sue formulazioni più perspicue. Il dominio discorsivo in questo caso riguarda le "event-particles" e non esplicitamente i punti; ma il problema di fondo ricalca un'impostazione essenzialmente geometrica e mostra ancora una volta la capacità di Whitehead di tradurre le proprie strutture formali tra i differenti ambiti delle sue indagini.

L'apparente differenza dei termini in gioco è dovuta all'evoluzione generale della filosofia di Whitehead, nel momento in cui comincia a cercare un analogo temporale di una teoria *point-free* dello spazio:

> The difficulty is this: When event-particles have once been defined it is easy to define the aggregate of event-particles forming the boundary of an event; and thence to define the point-contact at their boundaries possible for a pair of events of which one is part of the other. We can then conceive all the intricacies of tangency. In particular we can conceive an abstractive set of which all the members have point-contact at the same event-particle. It is then easy to prove that there will be no abstractive set with the property of being covered by every abstractive set which it covers. (CN, 87)

Whitehead si rende conto che, in alcuni casi, la classe di equivalenza delle classi astrattive che intuitivamente convergono verso il punto potrebbe

risultare vuota; [18] e poiché è proprio tale classe a definire il punto, ciò rischierebbe di invalidare l'intera teoria.

[18] Cfr. Coppola et al. (2010, teorema 5.7).

Il tentativo iniziale di Whitehead – prima di *Process and Reality* – è quello di imporre delle condizioni restrittive alla costruzione delle classi astrattive e quindi anche alla relazione di equivalenza dell'uguaglianza inclusiva; tuttavia, come ha correttamente rilevato David Bostock, si tratta essenzialmente di un modo di evitare il problema, «a fudge» (Bostock 2010, 24) – che per altro rende difficile definire i punti in modo diretto. La strategia di Whitehead per la versione più matura della sua teoria – presentata nella parte IV di *Process and Reality* – sarà piuttosto quella di riconoscere i limiti della sua definizione mereologica di classe astrattiva e fornire una caratterizzazione *mereotopologica* della relazione di inclusione in grado di affrontare adeguatamente "all the intricacies of tangency". [19]

[19] Cfr. Varzi (2021, 363ss).

Lo spunto essenziale per risolvere il problema giunge da un suggerimento avanzato da Theodore de Laguna in una breve nota del 1921 intitolata *Extensive Abstraction: A Suggestion*, rielaborata l'anno successivo, nell'articolo *Point, Line, and Surface, as Set of Solids* (de Laguna 1922b). La stessa intuizione era stata elaborata in modo indipendente da Jean Nicod nella sua tesi di dottorato, *La géométrie dans le monde sensible* (1924). [20] L'idea inizialmente formulata da de Laguna è la seguente:

> The method of extensive abstraction [...] can be greatly simplified and strengthened, if, instead of the indefinable relation of whole and part, or 'extending over', we assume the relation of 'containing'—in the sense of not only including as a part but completely enveloping. In this sense, one geometric solid would contain another solid, when the second was a part of the first, and no solid external to the first could touch the second. (De Laguna 1921, 216) [21]

[20] L'intuizione logico-matematica di Nicod consiste nel costruire gli assiomi su nozioni primitive semplici e cognitivamente plausibili, cioè basate su dati sensoriali. Nicod svolse il suo dottorato sotto la supervisione di Russell, che scrisse anche la prefazione all'edizione francese. Whitehead venne molto probabilmente a conoscenza del lavoro di Nicod *via* Russell, ed espresse ammirazione per il lavoro del giovane matematico francese.

[21] Di seguito la formulazione di Nicod: «Il faut introduire d'abord une limitation qui ne figure pas dans l'exposé de M. Russell, mais qui est indispensable à la justesse de la solution qui va suivre: on doit se borner aux classes abstractives dont les points communs sont à l'*intérieur* (et non à la surface) de tous les volumes de la classe. Cette condition préliminaire est remplie si nous posons que de deux volumes de la classe, l'un doit toujours être enfermé dans l'autre *sans tangence*» (Nicod 1924, 29).

In sostanza, il suggerimento tecnico di de Laguna consiste nel riformulare la nozione di classe astrattiva in termini che oggi diremmo mereotopologici, in modo che la relazione di inclusione si comporti come la conversa della relazione di parte non-tangenziale. Una simile strategia escluderebbe i casi problematici, in questo caso le serie convergenti nei punti di contatto. Nella terminologia eccentrica ma efficace di de Laguna (purtroppo abbandonata in 1922b) queste modifiche trasformerebbero le classi astrattive di Whitehead in "vanishing sets" e la definizione di punto potrebbe essere riformulata come «an equivalence class of vanishing sets that are covered by every vanishing set which they cover» (Varzi 2021, 360). Esistono caratterizzazioni topologiche standard adatte a definire in maniera adeguata la relazione di "containment"; tuttavia, il filosofo inglese sta cercando di formulare una teoria *point-free* e la topologia standard è *pointwise*, cioè costruita sui punti. Whitehead si rende quindi conto che una geometria *point-free* richiede una topologia *point-free*.

Nella nota del 1921, de Laguna non propone assiomi dettagliati; nell'articolo del 1922 presenta invece un trattamento assiomatico basato su una relazione primitiva di connessione – *x connette y e z* – che permette di

esprimere sia la nozione di "parte" che quella di "contenimento". Non convinto della teoria di de Laguna, in *Process and Reality* Whitehead segue soltanto il suo suggerimento, ma sviluppa i dettagli del metodo in modo autonomo. Rinuncia così a fare uso della relazione primitiva di contenimento per riformularla come una variante diadica della nozione primitiva presente in de Laguna (1922b), *x è connesso a y* – che potremmo intendere in modo informale come la relazione topologica che sussiste tra *x* e *y* quando questi condividono almeno un punto.

A partire dalla nuova relazione primitiva di connessione – che funge da vero e proprio *operatore relazionale* – Whitehead può definire le altre nozioni necessarie (PR, 294 e ss.), come la già menzionata relazione di parte: *x* è parte di *y* (e *y* include *x*) se e solo se tutto ciò che è connesso a *x* è connesso anche a *y*. Su queste basi, Whitehead può definire non solo la corrispondente relazione di "overlapping" (la condivisione di una parte comune), ma anche la relazione problematica e non mereologica di "external connection" – che descrive qualsiasi coppia di entità connesse ma non sovrapposte che si toccano sui rispettivi confini. Quest'ultima nozione, a sua volta, può essere utilizzata per descrivere il resto dell'apparato topologico, a partire dalla nozione essenziale di parte non-tangenziale: *x* è una parte non-tangenziale di *y* (*y* include non-tangenzialmente *x*) se e solo se *x* è parte di *y* e non esiste alcun *z* connesso esternamente a entrambi.

È evidente che questa nozione recupera quella di "contenimento" di de Laguna; Whitehead ha così finalmente gli strumenti per modificare nuovamente la sua definizione di "abstractive class", o in questo caso di "abstractive set": «A set of regions is called an 'abstractive set', when (i) any two members of the set are such that one of them includes the other non tangentially, and (ii) there is no region included in every member of the set» (PR, 298).

Non rimane quindi che definire i punti nei termini di classi di equivalenza di classi astrattive di copertura minima (PR, 299-301). Whitehead usa l'espressione "geometric element" per indicare una classe di equivalenza di classi astrattive e il termine "incidence" per la relazione sussistente tra due elementi geometrici *A* e *B* quando ogni membro di *B* è ricoperto da ogni elemento di *A* ma non viceversa. La definizione di punto è quindi raggiunta: «A geometrical element is called a 'point', when there is no geometrical element incident in it. This definition of a 'point' is to be compared with Euclid's definition: 'A point is without parts'» (PR, 299).

Topologia e astrazione

La nuova teoria non è semplicemente un miglioramento o un riadattamento delle versioni precedenti, ma rappresenta una sua radicale revisione e per questo motivo Whitehead le dà un nuovo nome: "the theory of extensive connection". Si tratta di una teoria piuttosto dettagliata che soffre tuttavia di un'assiomatizzazione incompleta e talvolta insufficiente (cfr. Varzi 2021), in particolare se consideriamo la relazione topologica di connessione – che figura ora come nozione primitiva. Non è ben chiaro il reale motivo per cui Whitehead abbia optato per questa scelta; [22] ed è difficile dare un'adeguata spiegazione di queste lacune, soprattutto in considerazione delle notevoli competenze matematiche di Whitehead. Il filosofo

[22] I due libri precedenti utilizzavano già una nozione di connessione ("joining"), definita in termini puramente mereologici (cfr. PNK, 102; CN, 76).

britannico era comunque, almeno in parte, consapevole di questa mancanza; anzi, nel fondamentale capitolo dedicato alla "extensive connection" sembra rinunciare deliberatamente a qualsiasi riduzione a un minimo logico delle caratteristiche in questione:

> No attempt will be made to reduce these enumerated characteristics to a logical minimum from which the remainder can be deduced by strict deduction. There is not a unique set of logical minima from which the rest can be deduced. There are many such sets. The investigation of such sets has great logical interest, and has an importance which extends beyond logic. But it is irrelevant for the purposes of this discussion. (PR, 294)

Pur rimanendo criptica, la scelta è tuttavia coerente con l'impostazione generale del metodo dell'astrazione estensiva: così come non esiste una nozione di punto come *minimo logico* di una serie convergente di regioni estese, non esiste neanche un *minimo logico* da cui ricavare per via puramente deduttiva le caratteristiche in oggetto.

Ci si sarebbe tuttavia aspettati un'argomentazione meno sbrigativa di una semplice affermazione di non rilevanza. In particolare, è alquanto sorprendente che Whitehead non discuta in alcun modo il fatto che le regioni definite dalle sue classi astrattive debbano essere continue – cioè auto-connesse (cfr. Varzi 2021, 367-368). Si tratta di un tema fondamentale non solo dal punto di vista topologico, ma anche filosofico: già in PNK e CN Whitehead opera, com'è noto, sotto l'ipotesi che gli eventi – le entità fondamentali della sua ontologia – fossero essenzialmente continui, cioè costituiti da parti non separate. L'enfasi sulla "continuity of nature" delle opere precedenti continua infatti ad essere presente in PR, dove le nozioni di *astrazione*, *relazione* e *processo* diventano centrali: «the physical world is bound together by a general type of relatedness which constitutes it into an extensive continuum» (PR, 96).

Più profondamente, è il ruolo generale delle astrazioni nelle scienze e nella filosofia ad essere al centro della filosofia speculativa di *Process and Reality*. Whitehead era convinto che la scienza fosse profondamente viziata da un'intelligenza spazializzante – che separa l'osservatore dal mondo osservato e la mente dalla materia – e da un materialismo edificato su astrazioni fallaci – come la già menzionata concretezza malposta. Le astrazioni scientifiche non possiedono un carattere unico, definitivo e direttamente correlato a una singola funzione pratica; esse consentono piuttosto di interpretare l'esperienza attraverso un processo continuo e mutevole che richiede una *filosofia del concreto* per integrare ciò che le astrazioni lasciano inevitabilmente da parte. In *Modes of Thought* Whitehead sostiene che la filosofia «is the criticism of abstractions which govern special modes of thought» (MT, 48-49); ma sarebbe completamente errato pensare che, con questa affermazione, egli volesse liberare l'esperienza dalla loro presa, come se un'esperienza senza astrazione fosse possibile.

Il senso del termine "criticism" assume qui una tonalità kantiana che tematizza direttamente la determinazione dei limiti delle astrazioni, delle loro condizioni di operatività e dei loro effetti trasformativi nell'esperienza. Non sarebbe esagerato considerare la filosofia di Whitehead come un audace tentativo di riconoscere alle astrazioni un ruolo fondamentale nell'esperienza. Il termine astrazione va così oltre il modello

logico-matematico delle astrazioni e delle forme di ipostatizzazione linguistica, diventando così la chiave di ogni interpretazione dell'esperienza: le astrazioni sono «true weapons with which to control our thought of concrete fact» (SMW, 41), hanno i loro vincoli, le loro modalità di costruzione, i loro modi di interagire. È quindi un'indagine sul modo di esistenza delle astrazioni e sulla loro funzione nelle esperienze più concrete a essere fondamentale per la filosofia di Whitehead; e una parte fondamentale di tale indagine viene svolta proprio attraverso il metodo che Whitehead ha costruito nelle sue ricerche sulla geometria *point-free*.

Chiudiamo con un passo tratto da *Modes of Thought* – l'ultimo lavoro di Whitehead – che commenta così il pensiero platonico sulle matematiche, legandolo alle nozioni di astrazione e processo. Da qui, a nostro avviso, dovremmo ripartire per comprendere il senso speculativo della sua proposta di una topologia, e forse di un pensiero, *non puntuato*:

> When Plato thought of mathematics he conceived of a changeless world of form, and contrasted it with the mere imitation in the world of transition. Yet when Plato thought of the realities of action, he swayed to the opposite point of view. He called for life and motion to rescue forms from a meaningless void.
> In these lectures Plato's second doctrine, of life and motion, has been adopted. The mathematical modes of fusion, such as 'addition', 'multiplication', 'serial form', and so on, have been construed as forms of process. The very notion of 'multiplicity' itself has been construed as abstraction from the form of process whereby data acquire a unity of issue into a novel datum.
> 7. Process and individuality require each other. In separation all meaning evaporates. The form of process [...] derives its character from the individuals involved, and the characters of the individuals can only be understood in terms of the process in which they are implicated. (MT, 96-97).

Bibliography

Biacino, L. & Gerla, G. (1996). Connection Structures: Grzegorczyk's and Whitehead's Definitions of Point. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 37 (3), 431-439.

Boyer, C.B. (1968). *A History of Mathematics*. New York: Wiley.

Bostock, D. (2010). Whitehead and Russell on points. *Philosophia Mathematica*, 18 (1), 1-52.

Broad, C.D. (1923). *Scientific Thought*. London: Kegan Paul & Co.

Broad, C.D. (1920). Critical Notices (of Whitehead's *The Principles of Natural Knowledge*). *Mind*, XXIX (2), 216-231.

Clarke, B.L. (1985). Individuals and Points. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 26 (1), 61-67.

Coppola, C., Gerla, G., Miranda, A. (2010). Point-Free Foundation of Geometry and Multivalued Logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 51 (3), 383-405.

de Laguna, T. (1922b). Point, Line, and Surface, as Set of Solids. *The Journal of Philosophy*, 19(17), 449-461.

de Laguna, T. (1920). Review of *An Enquiry Concerning the Principles of Natural Knowledge* by A.N. Whitehead. *The Philosophical Review*, 29 (3), 269-275.

de Laguna, T. (1921). Note: Extensive Abstraction: A Suggestion. *The Philosophical Review*, 30 (2), 216-218.

Durand, G. (2008). The Method of Extensive Abstraction. The Construction of Objects. In M. Weber & W. Desmond (eds.). *Handbook of Whiteheadian Process Thought. Vol. 1* (645-652). Frankfurt: Ontos.

Desmet, R. (2010). *Whitehead's Relativity*. In R. Desmet & M. Weber (eds.), *Whitehead: The Algebra of Metaphysics* (365-373). Louvain: Chromatika.

Durand, G. (2007). *Des événements aux objets. La méthode de l'abstraction extensive chez Alfred North Whitehead*. Frankfurt: Ontos.

Fitzgerald, J.A. (1979). *Alfred North Whitehead's Early Philosophy of Space and Time*. Washington-DC: University Press of America.

Gerla, G. (2021). Point-Free Continuum. In S. Shapiro & G. Hellman, (eds.) (2021). *The History of Continua: Philosophical and Mathematical Perspectives* (427-475). Oxford University Press.

Gerla, G. & Miranda, A. (2008). Mathematical Features of Whitehead's Point-Free Geometry. In M. Weber & W. Desmond (eds.). *Handbook of Whiteheadian Process Thought. Vol. 2* (119-130). Frankfurt: Ontos.

Gerla, G. & Tortora, R. (1996). Dissezioni e intersezioni di regioni in A.N. Whitehead. *Epistemologia*, 19 (2), 289-308.

Grattan-Guinness, I. (1975). The Royal Society's Financial Support of the Publication of Whitehead and Russell's Principia Mathematica. *Notes and Records of the Royal Society of London*, 30 (1), 89-104.

Günther, H. (2005). *Die Prozessphilosophie Alfred North Whiteheads und die Physik des 20. Jahrhunderts*. Aachen: Shaker.

Hampe, M. (1991). Einleitung: Whitehead's Entwicklung einer Tueorie der Ausdehnung. in M. Hampe & H. Maaßen (Hrsg.). *Prozeß, Gefühl und Raum-Zeit. Materialien zu Whitehead's "Prozeß und Realität", Band 1* (220-243). Frankfurt, Suhrkamp.

Hobson, E.W. & Love, A.E.H. (eds) (1913). *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians* (I-II). Cambridge University Press.

Huntington, E.V. (1913). A Set of Postulates for Abstract Geometry, Expressed in Terms of the Simple Relation of Inclusion. *Mathematische Annalen*, 73, 522-559.

Hurley, P.J. (1979). Whitehead's *Relational Theory of Space*: Text, translation, and commentary. *Philosophy Research Archives*, 5, 676-739.

Kraus, E.M. (1979). *The Metaphysics of Experience: A Companion to Whitehead's* Process and Reality. New York: Fordham University Press.

Lawrence, N. (1956). *Whitehead's Philosophical Development. A Critical History of the Background of Process and Reality*. Berkeley-CA: University of California Press.

Lawrence, N. (1950). Whitehead's Method of Extensive Abstraction. *Philosophy of Science*, 17 (2), 142-163.

Leclercq, B. (2011). Looking for New Mathematical Concepts for the Material World: Whitehead's Investigations into Formal Ontology. *Logique et Analyse*, 54 (213), 211-224.

Leśniewski, S. (1916). Podstawy ogólnej teoryi mnogości. I, Moskow, Prace Polskiego Koła Naukowego w Moskwie, Sekcya matematyczno-przyrodnicza. Trad. inglese di D.I. Barnett: *Foundations of the General Tueory of Sets*. *I*. In S. Leśniewski, *Collected Works* (a cura di S.J. Surma, J.T. Srzednicki, D.I. Barnett, e F.V. Rickey) (129-173). Dordrecht: Kluwer, 1992, vol. 1.

Leśniewski, S. (1916). *Podstawy ogólnej teoryi mnogości I*. Prace Polskiego Koła Naukowego w Moskwie, 2. [Foundations of the general theory of sets I, (Leśniewski, 1991, 129-173)].

Lobačevskij, N.I. (1835–1938), 'Novye načala geometrii s polnoĭ teorieĭ parallel'nyh'. *Učenye zapiski Kazanskogo Imperatorskogo universiteta*, 1835/III: 3–48; 1836/II: 3–98; 1836/III: 3–50; 1837/I: 3–97; 1838/I: 3–124; 1838/III: 3–65. Eng. trans. of the Introduction by G.B. Halsted (1897). *New Principles of Geometry with Complete Theory of Parallels*. Austin: Neomon.

Lowe, V (1990). *Alfred North Whitehead: The Man and His Work: 1910-1947*. Baltimore: Johns Hopkins University Press.

Lowe, V. (1982). Alfred North Whitehead: A Biographical Perspective. *Process Studies*, 12 (3), 137-147.

Lowe, V. (1962). *Understanding Whitehead*. Baltimore-MD: Johns Hopkins University Press.

Lowe, V. (1950). Whitehead's Philosophy of Science. In V. Lowe, C. Hartshorne, e A. H. Johnson (eds.). *Whitehead and the Modern World. Science, Metaphysics, and Civilization* (3-24). Boston-MA: Beacon.

Mays, W. (1977). *Whitehead's Philosophy of Science and Metaphysics: An Introduction to his Thought*, Tue Hague: Nijhoff.

Mays, W. (1961). The Relevance of "On Mathematical Concepts of the Material World" to Whitehead's Philosophy, in I. Leclerc (ed.), *The Relevance of Whitehead* (235-260). London: Allen & Unwin.

Mays, W. (1959). *The Philosophy of Whitehead*. London: Allen & Unwin.

Mays, W. (1952). Whitehead's Theory of Abstraction. *Proceedings of the Aristotelian Society*, 52, 95-118.

Nicod, J. (1924). *La géométrie dans le monde sensible*. Paris: Alcan.

Reymond, A.F. (1914). Le Premier Congrès de Philosophie mathématique, Paris, 6-8 avril 1914. *L'enseignement mathématique*, 16, 370-378.

Ridder, L. (2002). *Mereologie: Ein Beitrag zur Ontologie und Erkenntnistheorie*. Frankfurt: Klostermann.

Ridder, L. (2001). Whiteheads Theorie der Ausdehnung. *Logical Analysis and History of Philosophy*, 4 (1), 143-172.

Ringel, C.M. (2008). Extension in PR Part IV. In M. Weber & W. Desmond (eds.). *Handbook of Whiteheadian Process Thought. Vol. 2* (131-156). Frankfurt: Ontos.

Russell, B. (1948b). Whitehead and Principia Mathematica. *Mind*, LVII (226), 137-138.

Russell, B. (1914). *Our Knowledge of the External World*. London: Allen & Unwin.

Shapiro, S. & Hellman, G. (eds.) (2021). *The History of Continua: Philosophical and Mathematical Perspectives*. Oxford University Press.

Simons, P.M. (1991). Whitehead und die Mereologie. In M. Hampe e H. Maaßen (Hrsg.), *Die Gifford Lectures und ihre Deutung. Materialien zu Whiteheads 'Prozess und Realität'*, Band 2 (369-388). Frankfurt: Suhrkamp.

Stebbing, S. L. (1930). *A Modern Introduction to Logic*. London: Methuen.

Palter, R. (1960). *Whitehead's Philosophy of Science*. University of Chicago Press.

Tanaka, Y. (1987). Einstein and Whitehead: The Principle of Relativity Reconsidered. *Historia scientiarum: international journal of the History of Science Society of Japan*. 32, 43-61.

Tarski, A. (1929). Les fondements de la géométrie des corps, Księga Pamiątkowa Pierwszkego Polskiego Zjazdu Matematycznego, suppl. to *Annales de la Société Polonaise de Mathématique*, 7, 29-33. Trad. inglese di J. H. Woodger. Foundations of the Geometry of Solids. In A. Tarski, *Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938* (24-29). Oxford: Clarendon.

Varzi, A.C. (2021). Points as Higher-Order Constructs: Whitehead's Method of Extensive Abstraction. In S. Shapiro & G. Hellman, (eds.) (2021). *The History of Continua: Philosophical and Mathematical Perspectives* (347-378). Oxford University Press.

von Ranke, O. (1997). *Whiteheads Relativitätstheorie*. Regensburg: Roderer.

Vuillemin, J. (1971). *La logique et le monde sensible. Étude sur les théories contemporaines de l'abstraction*. Paris: Flammarion.

Whitehead, A.N. (1906a). On mathematical concepts of the material world. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, *Series A*, 205, 465-525.

Whitehead, A.N. (1906b). *The Axioms of Projective Geometry*. Cambridge University Press.

Whitehead, A.N. (1907). *The Axioms of Descriptive Geometry*. Cambridge University Press.

Whitehead, A.N. & Russell, B. (1910-1913). *Principia Mathematica*. Cambridge University Press.

Whitehead, A.N. (1916a). La théorie relationniste de l'espace. *Revue de Métaphysique et de Morale*, 23 (3), 423-454.

Whitehead, A.N. (1916b). Space, time, and relativity. *Proceeding of the Aristotelian Society*, 16, 104-129.

Whitehead, A.N. (1916c). The organisation of thought. *Science*, 44 (1134), 409-419.

Whitehead, A.N. (1917). The anatomy of some scientific ideas. Ch. 7 of *The Organisation of Thought, Educational and Scientific* (134-190). London: Williams & Norgate.

Whitehead, A.N. (1919a). *An Enquiry Concerning the Principles of Natural Knowledge*. Cambridge University Press.

Whitehead, A.N. (1919b). Time, space, and material: Are they, and if so in what sense, the ultimate data of science?. *Proceedings of the Aristotelian Society*, *Supplementary Volumes*, 2, 44-57.

Whitehead, A.N. (1920a). *The Concept of Nature*. Cambridge University Press.

Whitehead, A.N. (1922). *The Principle of Relativity, with Applications to Physical Science*. Cambridge University Press.

Whitehead, A.N. (1929). *Process and Reality: An Essay in Cosmology*. Cambridge University Press.

Whitehead, A.N. (1929b). *Science and the Modern World*. Cambridge University Press.

Whitehead, A.N. (1938). *Modes of Thought World*. New York: Macmillan.